

## **Uma nota sobre o procedimento de “Mapeamento em Vértices” nos modelos de cálculo do VaR de instrumentos de renda fixa\***

Guilherme Lins Arcoverde\*

### **Introdução**

*A questão da adoção de uma metodologia de “mapeamento” emerge do procedimento, freqüentemente adotado na prática, de decomposição de uma carteira de instrumentos financeiros em um número, em regra elevado, de fluxos de caixa, cada qual relativo a um vencimento diferente, oriundos da decomposição, de cada posição da carteira, em seus fluxos elementares. No nosso caso estamos interessados no conjunto de fluxos representativos da posição sob risco de taxa pré, ao qual chamaremos de carteira, sendo cada fluxo definido por um valor financeiro comprado (+) ou vendido (-) e um prazo de vencimento.*

*Com vistas a evitar um crescimento exagerado do número de volatilidades e correlações a serem calculadas no contexto da determinação do Valor em Risco (VaR), define-se um número fixo de vértices aonde os fluxos de caixa devem ser “mapeados”, isto é, como um fluxo de caixa estará situado, necessariamente, entre dois vértices adjacentes, “mapeá-lo” significa transformar o fluxo original em dois fluxos, um em cada vértice e a carteira original, composta de um número qualquer de fluxos, com diversos vencimentos, numa carteira padronizada, com fluxos em um número fixo de vértices.*

*Não existe uma única forma para decompor um dado fluxo de caixa entre dois vértices. Com a edição, pelo Banco Central do Brasil, da Circular n° 2972, de março de 2000, adotando o mapeamento linear, que descreveremos no que segue, pode-se imaginar que, sua adoção, na referida circular, advém das simplificações naturais, no contexto de um modelo padrão. Tal não é o caso. A escolha do mapeamento linear foi feita no âmbito mais geral da especificação de um modelo de VaR, que, na metodologia utilizada na construção do modelo padrão implantado na circular 2972 é chamado de*

---

<sup>1</sup> Assessor Sênior do DEPEP, Departamento de Pesquisas do Banco Central do Brasil.. Agradeço os comentários dos meus colegas do DEPEP, do Prof. Gyorgy Varga e a cuidadosa revisão de Ângelo José Mont Alverne Duarte

modelo interno de referência<sup>1</sup>, nomenclatura oriunda da regulamentação internacional que abriga como alternativa preferencial na definição da exigência de capital, o regime baseado nos modelos internos.

Quanto ao “mapeamento”, testaremos duas formas alternativas de procedê-lo, a primeira, popularizada no documento técnico do RiskMetrics<sup>2</sup>, e utilizada em larga escala pela comunidade financeira em seus sistemas de gerenciamento de risco desde a publicação do referido documento.

A segunda, extremamente simples, e, atualmente, recomendada como mais eficiente pelo próprio RiskMetrics Group, em trabalho divulgado na InterNet<sup>3</sup> ao final do ano passado, baseia-se numa decomposição do fluxo, na proporção dada pela razão entre a diferença do prazo associado ao vértice adjacente à direita do fluxo e o prazo do mesmo, sobre a diferença de prazos dos referidos vértices<sup>4</sup>.

Chamaremos o primeiro critério de Mapeamento RiskMetrics Tradicional, e o segundo, de Mapeamento Linear. Especificamos a seguir, o modelo de VaR para taxa pré, subjacente ao exercício que realizaremos, com o intuito de comparar os dois critérios de mapeamento.

#### **O MODELO DE VAR PARA TAXA PRÉ**

##### **Especificação da estrutura a termo da taxa de juros.**

O cálculo do VaR dos instrumentos financeiros se faz a partir da construção das séries de retornos dos fatores de risco correspondentes.

Seja  $V$  o valor presente de uma carteira representativa de uma posição sob risco “Taxa de Juros Pré”, composta de  $N$  fluxos  $F_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , cada qual com vencimento no prazo  $T_i$ ,  $r$  a taxa de juros de capitalização contínua,  $R$  a taxa de juros no formato Bacen<sup>5</sup>, temos:

---

<sup>1</sup> Arcoverde, Guilherme Lins: Tese de Mestrado EPGE/FGV, nov/1999

<sup>2</sup> RiskMetrics™ Technical Document (1996)

<sup>3</sup> Mina, Jorge, “Improved Cashflow Map”, (1999), “RiskMetrics Group”

<sup>4</sup> Esse método de mapeamento linear me foi sugerido por Eduarda De La Roque, antes da divulgação do trabalho referido na nota anterior. Eduarda, com base em seus próprios estudos, já utiliza esse método há vários anos nos seus modelos de risco.

<sup>5</sup> taxa efetiva, anualizada, na hipótese de 252 dias úteis no ano.

$$F e^{-\frac{r_{i,T} T}{252}} = \frac{F}{(1 + R_{i,T})^{T/252}} \Rightarrow r_{i,T} = \ln(1 + R_{i,T})$$

e, fazendo  $r_{i,T} = r_i$  para simplificar a notação temos:

$$V_i = \sum_{i=1}^N F_i e^{-\frac{r_i T_i}{252}} \Rightarrow \Delta V = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i e^{-\frac{r_i T_i}{252}}}{\partial r_i} = \sum_{i=1}^N -\frac{T_i}{252} V_i \Delta r_i \text{ (em primeira ordem)}$$

onde  $V_i = F_i e^{-\frac{r_i T_i}{252}}$  é o valor presente (marcado a mercado) do fluxo  $F_i$ ,

$$\Delta r_i = r_{i,t} - r_{i,t-1} = \ln\left(\frac{1 + R_{i,t}}{1 + R_{i,t-1}}\right)$$

Portanto, as variações relativas às taxas de juro, são tomadas a partir da razão das taxas vigentes para um mesmo prazo, entre datas sucessivas e compõem os fatores de risco necessários para modelar a variação de uma

carteira de renda fixa,  $z_{i,T} = \Delta r_{i,T} = \ln\left(\frac{1 + R_{i,t}}{1 + R_{i,t-1}}\right)$ , onde,  $R_{i,T}$  é a taxa de juros anual com composição discreta (considerando 252 dias úteis no ano) para a data  $t$ , a incorrer durante o prazo de  $T$  dias úteis.

Uma característica dos papéis de renda fixa é que seus preços não são diretamente comparáveis (como as ações por exemplo, que possuem duração infinita) pois, o passar do tempo muda sua natureza, uma vez que, dia a dia, ele se torna um papel de prazo menor, até o seu vencimento.

A estrutura a termo da taxa de juros é construída a partir dos prazos que o mercado negocia com maior liquidez. Sua determinação é essencial para a determinação do preço dos ativos relacionados e para a avaliação da estrutura a termo de volatilidade das taxas. A metodologia utilizada na construção dos fatores relacionados a juro baseou-se no tratamento de taxas com prazos fixos no tempo, isto é, fixou-se um determinado prazo e, dia a dia, calculou-se a taxa de juros de hoje até esse prazo<sup>6</sup>.

Dessa forma, a série obtida possui uma homogeneidade que não existe com os títulos reais, que dia a dia mudam de natureza pois vão se tornando papéis de duração menor. Com a definição de um número limitado de prazos, temos os chamados vértices, que funcionam como títulos virtuais que possuem sempre a mesma duração.

A cada dia útil, são calculadas as taxas a serem incorridas para os diferentes prazos definidos, possibilitando a obtenção de séries diárias de taxas

---

<sup>6</sup> taxa spot

spot, uma para cada vencimento. São utilizados dados dos mercados de futuro e swaps (BM&F), além da taxa CDI por serem os instrumentos que possuem maior liquidez.

Os prazos eleitos para os vértices do juro para taxa pré, em R\$, foram: 1, 21, 42, 63, 126, 252, 504 e 756 dias úteis. A estrutura a termo é obtida por meio das taxas de juro embutidas nas cotações do CDI over, contrato futuro de DI (primeiro ao terceiro vencimentos) e taxas de swaps DI x PRE apuradas para os prazos de 6, 12 e 24 meses. Obtêm-se as taxas spot por meio da acumulação das taxas a termo implícitas entre os vencimentos dos instrumentos financeiros listados, assumindo a hipótese de que a taxa a termo entre os vencimentos dos referidos instrumentos é constante<sup>7</sup>. Nesse trabalho, iremos ainda mais longe, assumiremos que as taxas básicas calculadas diariamente para cada vértice são as nossas fontes básicas de informação e suporemos que as taxas a termo entre os vértices são constantes.

#### **Volatilidades, Correlações e Mapeamento**

Identificados nossos fatores de risco a modelar, isto é, os retornos associados aos vértices da Estrutura a Termo da Taxa de Juros, precisamos de um modelo estatístico para calcular as volatilidades e correlações pertinentes.

#### *Volatilidades e Correlações*

Sendo:  $\sigma_{i,t+1|t} = \sqrt{\lambda\sigma_{i,t|t-1}^2 + (1-\lambda)z_{i,t}^2}$  a expressão para a volatilidade associada ao vértice  $i$  pelo método EWMA, com as clássicas hipóteses de média zero e normalidade para  $z_{i,t}$ , além da disponibilidade de uma série infinita de dados tal como feitas no RiskMetrics™, definiremos

$f_i(\lambda, i) = \sqrt{\lambda\sigma_{i,t|t-1}^2 + (1-\lambda)z_{i,t}^2}$  e usaremos uma sua variante<sup>8</sup> para a volatilidade do vértice  $i$ ,  $\sigma_{i,t+1|t} = \max(f_t(\lambda_1, i), f_t(\lambda_2, i))$  usando  $\lambda_1 = 0,85$  e  $\lambda_2 = 0,94$ <sup>9</sup>.

<sup>7</sup> Há formas mais sofisticadas de construção da estrutura a termo. Contudo, para nossos objetivos, isto é, cálculo do VaR de uma carteira de renda fixa para fins de exigência de capital, a estrutura “flat forward” tem o mérito da simplicidade, além de implicar, como veremos, uma forma intuitiva de proceder o mapeamento nos vértices.

<sup>8</sup> Ver Arcoverde, Guilherme

<sup>9</sup> idem

As covariâncias e correlações serão calculadas pelo método EWMA, simples, com  $\lambda = 0,94$  para  $i \neq j$ , sob as mesmas hipóteses simplificadoras que mencionamos para o cálculo da volatilidade (RiskMetrics™). Obtemos então:

$$\sigma_{ij,t+1|t}^2 = \lambda \sigma_{ij,t|t-1}^2 + (1 - \lambda) z_{i,t} z_{j,t} \quad e \quad \rho_{ij,t+1|t} = \frac{\sigma_{ij,t+1|t}}{\sigma_{i,t+1|t} \sigma_{j,t+1|t}}$$

Uma vez efetuado o mapeamento, por qualquer um dos critérios que mencionamos, os quais analisaremos com todo detalhe no que segue, a carteira original composta de  $N$  fluxos estará transformada numa carteira com 8 fluxos relativos aos vértices eleitos, sendo o valor presente de cada vértice igual à soma algébrica dos valores nele alocados, a saber, para o vértice  $i$ ,

$V_{MTM_i}$ . O VaR diário do vértice  $i$  ao nível de 1% será portanto:

$$VaR_i = 2,33 \times V_{MTM_i} \times \frac{T_i}{252} \times \sigma_{i,t|t-1}$$

O VaR da carteira será obtido, agregando-se os VaRs de cada vértice fazendo uso das correlações que especificamos para o modelo.

$$VaR_{Carteira} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 VAR_i \times VAR_j \times \rho_{i,j}}$$

#### ***O Mapeamento RiskMetrics™ Tradicional***

Um fluxo estará sempre entre dois Vértices, como mostra o esquema abaixo. Sua alocação nos Vértices adjacentes é feita de forma que os dois fluxos resultantes preservem:

**O valor de Mercado**

**O Risco**

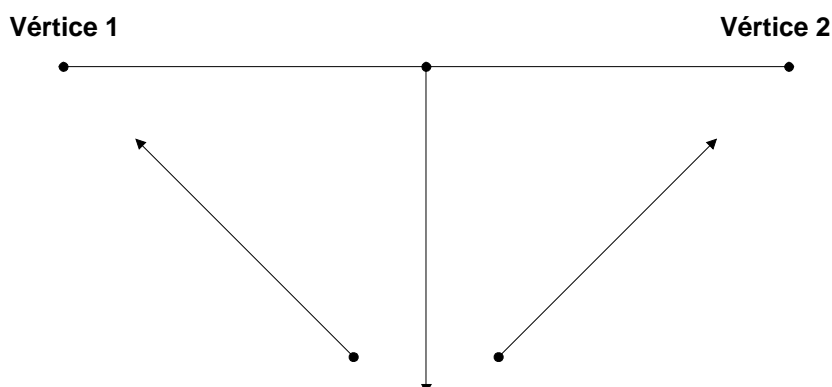
**O sinal do fluxo**

Isto é, a soma dos valores presentes dos dois fluxos mapeados deve ser igual ao valor presente do fluxo original, a volatilidade do portfólio definido pelos dois fluxos decompostos deve ser a mesma daquela associada ao fluxo original que, para efeito desse procedimento é definida por interpolação linear<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Note-se que esse procedimento é arbitrário e, não necessariamente compatível com nossas hipóteses ao construir a estrutura a termo das taxas de juros.

entre as volatilidades associadas aos vértices adjacentes, e, finalmente, exige-se também que os fluxos “mapeados” tenham o mesmo sinal do fluxo original.

Esquema indicativo do mecanismo de mapeamento do *RiskMetrics*



Para tal, o procedimento de mapeamento dos fluxos representativos da posição nos diversos Vértices segue o seguinte algoritmo:

1 – Cálculo da volatilidade preço para o prazo relativo ao fluxo por interpolação linear

$$\sigma = \alpha_0 \sigma_1 + (1 - \alpha_0) \sigma_2$$

$$\alpha_0 = \frac{\text{Prazo Vértice2} - \text{Prazo Fluxo}}{\text{Prazo Vértice2} - \text{Prazo Vértice1}}$$

Onde  $\sigma_1$  é a volatilidade do retorno de um papel pré com prazo igual àquele associado ao primeiro vértice e  $\sigma_2$  é a volatilidade do retorno de uma papel pré com prazo igual àquele associado ao segundo vértice.

2 - Determinação do fator de decomposição  $\alpha$  de forma a preservar o risco da posição. Resolve-se a equação do segundo grau em  $\alpha$ :

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

Obtendo-se:

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \alpha \in [0;1]$$

onde :

$$A = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

$$B = 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$$

$$C = \sigma_2^2 - \sigma^2$$

- 3 - Por último, procede-se a alocação do fluxo original, substituindo-o por dois fluxos nos vértices 1 e 2 nas proporções  $\alpha$  e  $(1-\alpha)$  do valor a mercado do fluxo original.

#### *Análise do procedimento*

A experiência empírica mostra que esse procedimento funciona a contento na maioria das situações, havendo, contudo, casos em que o mecanismo apresenta um comportamento inadequado. Passemos pois, à sua análise.

Consideremos a equação de  $\sigma$  em função de  $\alpha$ , o percentual do valor presente do fluxo alocado no primeiro vértice.

$$\sigma^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = \phi(\alpha)$$

Vamos analisar duas configurações ilustrativas das situações possíveis, sendo que, em ambas, temos a volatilidade preço  $(\frac{T_i}{252} \times \sigma_i)$ <sup>11</sup> do primeiro vértice, isto é, aquele situado à esquerda do fluxo a ser “mapeado” ( $\sigma_1$ ), igual a 0,011351, de prazo igual a 126 dias úteis, e a volatilidade preço do segundo vértice, no caso, aquele com prazo de 252 dias úteis ( $\sigma_2$ ), igual a 0,014892, calculadas de acordo com o método já exposto para a volatilidade que estamos utilizando no nosso modelo interno.

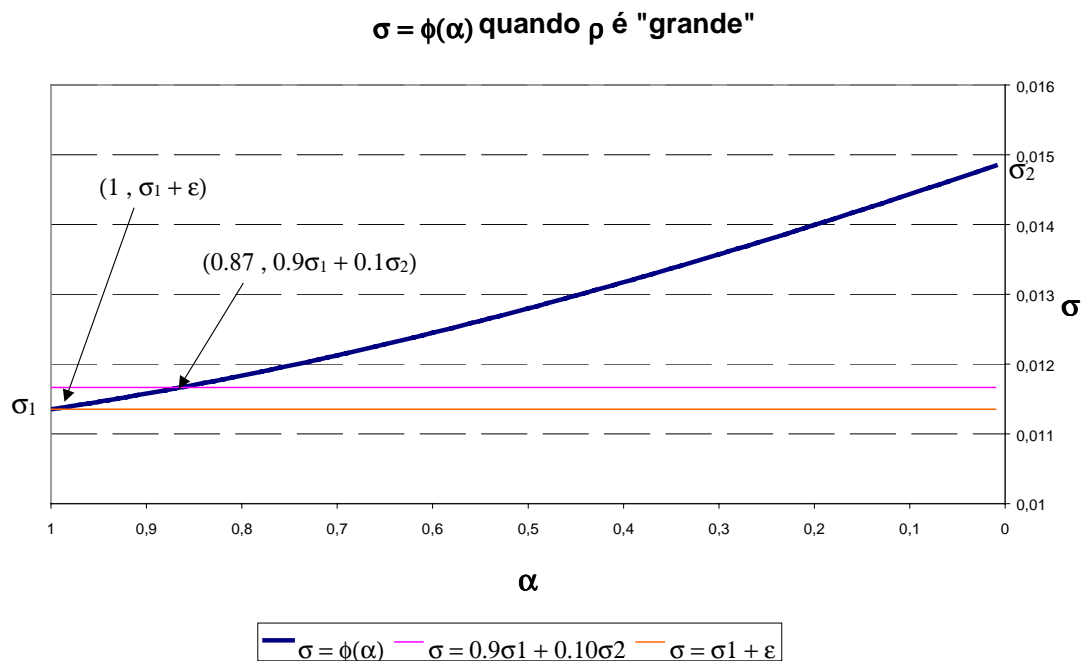
---

<sup>11</sup> Na verdade, estamos cometendo um abuso de linguagem para simplificar a notação. Na especificação do nosso modelo, estamos usando o símbolo  $\sigma$  para designar a volatilidade “taxa”,  $\sigma(\Delta r)$ . Na especificação do algoritmo tradicional do *RiskMetrics* estamos usando o símbolo  $\sigma$  para designar a volatilidade preço que é o produto da volatilidade “taxa” pela duração do papel (ou do vértice).

Vamos assumir que temos  $\sigma = 0,011665$ , isto é, que o fluxo encontra-se próximo do vértice à sua esquerda ( $\sigma = 0,9\sigma_1 + 0,1\sigma_2$ ).

O gráfico 1 ilustra o caso em que a correlação entre os retornos das taxas associadas aos dois vértices é alta, digamos,  $\rho_{12} = 0,9$ .

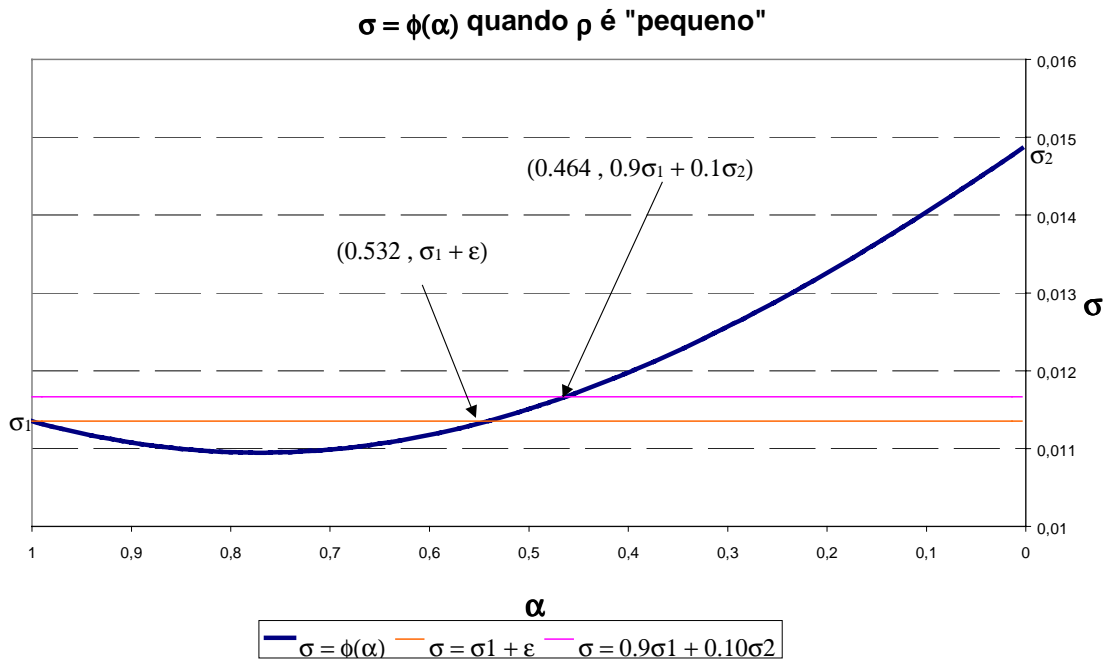
Gráfico 1 – Ilustração da situação favorável ao mapeamento tradicional



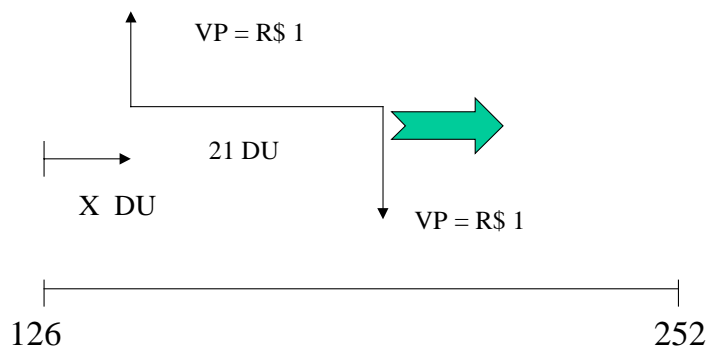
Nesse caso, o valor de  $\alpha$ , calculado como solução da equação do algoritmo tradicional, no valor de 87%, é compatível com nossa intuição de que o mapeamento deve alocar a maior parcela do valor presente do fluxo no primeiro vértice.

O gráfico 2, ilustrativo do caso em que temos uma correlação mais baixa,  $\rho_{12} = 0,53$ , no qual o valor de  $\alpha$  calculado pelo critério RiskMetrics tradicional é de 46,4%, mostra um comportamento bizarro do algoritmo de mapeamento uma vez que o fluxo, que, intuitivamente deveria ser mapeado em sua maior parte no vértice de menor volatilidade foi alocado em mais de 50% no vértice à sua direita.

**Gráfico 2 – Ilustração da situação desfavorável ao mapeamento tradicional**



A deficiência do método tradicional nesse caso é patente, pois, a existência de um mínimo, no intervalo  $(0;1)$ , da volatilidade, como função do percentual do valor presente do fluxo alocado no primeiro vértice, faz com que o algoritmo de cálculo tradicional do RiskMetrics, ao calcular  $\alpha$ , possa produzir uma descontinuidade na medida de VaR como pode ser observado analisando o VaR do seguinte fluxo de caixa:



Isto é, um fluxo comprado com valor presente de R\$ 1, com vencimento inicialmente situado exatamente no vértice de 126 dias úteis, outro vendido também com valor presente de R\$1, com vencimento 21 dias após o primeiro, em seguida, considere esses mesmos fluxos, com prazos deslocados de um pequeno valor  $\delta > 0$ , à direita do primeiro vértice. Pelo algoritmo, para encontrar um valor de  $\alpha$  que resolva a equação da volatilidade definida por interpolação linear, que será, digamos, igual a  $\sigma_1 + \epsilon$ , levemente superior à volatilidade do

primeiro vértice, percorreremos a região decrescente da função, e encontraremos um valor de  $\alpha$  à direita daquele em que a função atinge seu mínimo, e, dessa forma, aumentaremos significativamente a parcela  $(1-\alpha)$  do valor presente do fluxo alocado no segundo vértice. Consequentemente, o valor em risco do portfólio mapeado nos vértices 1 e 2 apresentará uma descontinuidade no ponto correspondente ao primeiro vértice, com uma abrupta redução do seu valor, nesse exemplo, assim que deslocarmos o fluxo do primeiro vértice para sua direita, fruto da descontinuidade do valor alocado no primeiro vértice, para esse fluxo, que cai, de 100%, quando o fluxo situa-se exatamente no primeiro vértice, para 53,2%, ao menor deslocamento (tomamos  $\delta$  tal que  $\varepsilon = 0,00001$ ) para a direita. Esse comportamento não é compatível com o bom senso e resta ver em que condições ele se faz presente, do que cuidaremos agora. Mais adiante retornaremos ao exemplo do fluxo “hedgado” acima descrito.

Considerando novamente a função  $\sigma = \phi(\alpha)$ , e, estabelecendo a condição de primeira ordem para um mínimo, temos:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha} = 0, \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}, \text{ e, como, o denominador é positivo}$$

para  $\rho_{12} < 1$  ou  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , temos que:

$$\bar{\alpha} \in (0,1) \Leftrightarrow \rho_{12} < \frac{\min(\sigma_1, \sigma_2)}{\max(\sigma_1, \sigma_2)}$$

Essa condição, para a correlação entre dois vértices adjacentes, estabelece as situações em que o mecanismo tradicional de mapeamento do RiskMetrics apresenta um comportamento extremamente inadequado.

Testando a condição acima no nosso mercado, obtivemos uma frequência de ocorrência não desprezível, podendo chegar à ordem de grandeza do nosso nível de significância, dependendo do período analisado e do modelo para cálculo de volatilidades e correlações. No trabalho citado na nota 3, o autor menciona uma ocorrência isolada encontrada na Austrália e afirma não ter conhecimento de outras ocorrências dessa condição. No Brasil no entanto, em certos períodos, ela não é tão rara assim.

### O Mapeamento Linear

Este método é extremamente mais simples, procedendo-se a alocação do fluxo original nos vértices adjacentes nas proporções  $\alpha_0$  e  $(1-\alpha_0)$  nos vértices 1 e 2 respectivamente onde  $\alpha_0$  é definido por:

$$\alpha_0 = \frac{\text{Prazo Vértice2} - \text{Prazo Fluxo}}{\text{Prazo Vértice2} - \text{Prazo Vértice1}}$$

Vejamos portanto, a racionalidade subjacente.

Sendo  $f(t)$  a taxa instantânea de juros no tempo  $t$ , a taxa de capitalização contínua de um título com prazo  $T$ ,  $r_T$ , é, por definição, dada por:

$$e^{\int_0^T f(s)ds} = e^{r_T T} \Rightarrow r_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(s)ds$$

Como observamos<sup>12</sup> as taxas de juros apenas para os vértices, de prazos  $T_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , respectivamente,  $r_{T_1}, \dots, r_{T_n}$ , a saber, as taxas de hoje até o vencimento  $T_i$ , assumimos, por hipótese que  $f(t)$  é constante entre os vértices, isto é:

$f(t)_{|t \in (0, T_1]} = r_{0, T_1} = r_{T_1}$  e  $f(t)_{|t \in (T_i, T_{i+1})} = r_{T_i, T_{i+1}}$ , temos, portanto,

$$e^{r_{T_i} T_i} \times e^{r_{T_i, T_{i+1}} (T_{i+1} - T_i)} = e^{r_{T_{i+1}} T_{i+1}} \Rightarrow r_{T_i, T_{i+1}} = \frac{r_{T_{i+1}} T_{i+1} - r_{T_i} T_i}{T_{i+1} - T_i}, \text{ logo, se } T \in (T_i, T_{i+1}),$$

temos:

$$r_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(s)ds = \frac{1}{T} \left( \sum_{k=1}^i r_{T_{k-1}, T_k} (T_k - T_{k-1}) + r_{T_i, T_{i+1}} (T - T_i) \right) \Rightarrow \text{fazendo } \alpha = \frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i}$$

$$r_T = \frac{T_i}{T} \alpha r_{T_i} + \frac{T_{i+1}}{T} (1 - \alpha) r_{T_{i+1}}$$

Seja agora  $P_{T,1} = e^{-T r_{T,1}}$  o preço, na data 1, de um papel que vence num prazo  $T$  (no nosso contexto, dias úteis / 252). Seu retorno é dado por:

$$R_T^p = \ln \left( \frac{P_{T,2}}{P_{T,1}} \right) = -T (r_{T,2} - r_{T,1}) \text{ e, substituindo o resultado acima obtido para } r_T,$$

em função das taxas associadas aos vértices  $i$  e  $i+1$ , temos:

<sup>12</sup> na verdade, as taxas associadas aos vértices da ETTJ, não são observadas, mas sim, inferidas, a partir das taxas e preços dos instrumentos financeiros que apresentam liquidez satisfatória.

$$R_T^p = -T \left( \frac{T_i \alpha}{T} r_{T_i,2} + \frac{T_{i+1}(1-\alpha)}{T} r_{T_{i+1},2} - \frac{T_i \alpha}{T} r_{T_i,1} - \frac{T_{i+1}(1-\alpha)}{T} r_{T_{i+1},1} \right) \Rightarrow$$

$$R_T^p = -T \left( \frac{T_i \alpha}{T} (r_{T_i,2} - r_{T_i,1}) + \frac{T_{i+1}(1-\alpha)}{T} (r_{T_{i+1},2} - r_{T_{i+1},1}) \right) \Rightarrow$$

$$R_T^p = \alpha (-T_i (r_{T_i,2} - r_{T_i,1})) + (1-\alpha) (-T_{i+1} (r_{T_{i+1},2} - r_{T_{i+1},1})) \Rightarrow$$

$R_T^p = \alpha R_{T_i}^p + (1-\alpha) R_{T_{i+1}}^p$  ou seja, o **mapeamento que se obtém**, pela assunção de uma estrutura a termo com taxas constantes, entre os vértices, é **linear nos retornos**.

Utilizando a aproximação usual  $R_T^p = \frac{P_{T,2} - P_{T,1}}{P_{T,1}}$ , obtemos

$P_{T,2} = P_{T,1}(1 + R_T^p)$  e, substituindo o resultado obtido para  $R_T^p$ , como combinação linear das taxas associadas aos dois vértices adjacentes, obteremos a expressão:

$$P_{T,2} = P_{T,1}(1 + \alpha R_{T_i}^p + (1-\alpha) R_{T_{i+1}}^p) = P_{T,1}(1 + \alpha(\frac{P_{T_i,2}}{P_{T_i,1}} - 1) + (1-\alpha)(\frac{P_{T_{i+1},2}}{P_{T_{i+1},1}} - 1)) \Rightarrow$$

$$P_{T,2} = \alpha P_T \frac{P_{T_i,2}}{P_{T_i,1}} + (1-\alpha) P_T \frac{P_{T_{i+1},2}}{P_{T_{i+1},1}}$$
 deixando claro que, o fluxo correspondente

ao investimento de R\$  $P_T$ , num papel com prazo T, pode ser aproximadamente reproduzido pelo portfólio formado por uma aplicação de R\$  $\alpha P_T$  no papel de prazo  $T_i$  e outra de R\$  $(1-\alpha)P_T$  no papel de prazo  $T_{i+1}$ .

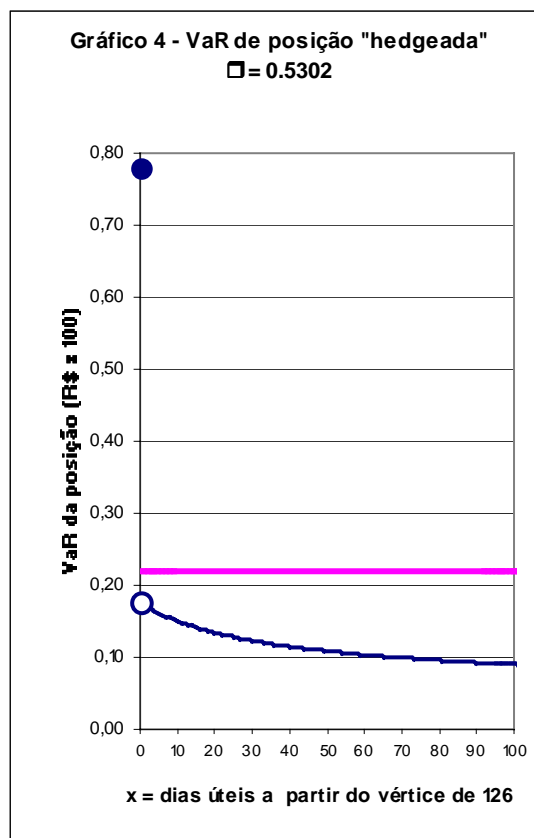
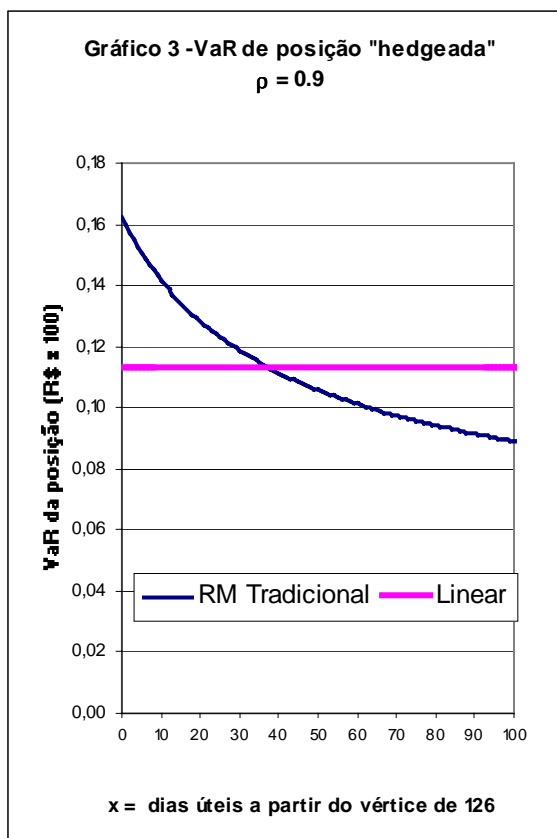
Note-se que, a volatilidade imputada ao retorno do fluxo original pelo mapeamento linear será a volatilidade de  $R_T^p$  a saber:

$$\sigma^L = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$$

Assim sendo, temos:  $\sigma^L \leq \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2$  ou seja, o VaR obtido com o mapeamento linear é menor ou igual àquele obtido pelo mapeamento tradicional, quando relativos ao mesmo fluxo de caixa. Quando temos uma posição com fluxos de diferentes sinais, já não podemos afirmar nenhuma relação de ordem entre as duas medidas de VaR, mesmo na ausência da condição em que o mapeamento tradicional produz uma descontinuidade na

medida de VaR como no gráfico 4, fato que ilustraremos no exemplo a seguir. Considere a carteira “hedgeada”, já mencionada, entre os vértices com prazos de 126 e 252 dias úteis constando de: uma posição comprada num papel com vencimento  $126 + x$ , de valor presente R\$ 1, uma posição vendida com vencimento  $126 + x + 21$ , também com valor presente de R\$ 1. Façamos  $x$  variar de zero a 105 de forma a termos ambos os fluxos entre os vértices citados e consideremos os mesmos dados utilizados na elaboração dos gráficos 1 e 2. O gráfico 3 ilustra o caso para  $\rho_{12} = 0,9$ , isto é, sem descontinuidades na medida de VaR e o gráfico 4 considera  $\rho_{12} = 0,53$  que, como vimos, vai provocar uma descontinuidade na medida do VaR quando utilizando o algoritmo tradicional. Em qualquer caso, o mapeamento linear produzirá um VaR constante, relativo ao descasamento de 21 dias, sob risco da taxa “forward” entre 126 e 252 dias úteis. As contas são imediatas, vejamos: a parcela alocada no vértice de 126 DU é de  $\frac{126-x}{126}$  do fluxo 1 e  $\frac{126-x-21}{126}$  do fluxo 2 cuja soma algébrica é 0,1666667. A parcela alocada no vértice de prazo 252 DU é  $(1 - \frac{126-x}{126}) - (1 - \frac{126-x-21}{126})$  cujo valor é -0,1666667.

Teremos:  $VaR^{Linear} = \sqrt{0,16^2 \sigma_1^2 + (-0,16)^2 \sigma_2^2 + 2(0,16)(-0,16)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$  cujo valor é R\$ 0,001134 se  $\rho_{12} = 0,9$  e R\$ 0,002182 se  $\rho_{12} = 0,53$ . Quanto ao VaR calculado pelo método tradicional, quando  $x=0$ , isto é, o primeiro fluxo da nossa carteira situa-se exatamente no primeiro vértice, temos um fator de decomposição de 1 para o primeiro fluxo e de 0,41 para o segundo fluxo, levando a um valor mapeado no primeiro vértice de R\$ 0,59 e de -R\$ 0,59 no segundo vértice, o que implica num VaR = R\$ 0,0078. Ao menor deslocamento de  $x$  para a direita, os valores dos fatores de decomposição dos dois fluxos da carteira sob análise passam para 0,53 e 0,40, levando aos valores de R\$ 0,13 e -R\$0,13 como resultado do mapeamento nos vértices 1 e 2 respectivamente, o que implica num VaR = R\$ 0,0017. Os gráficos 3 e 4 mostram a evolução das medidas de VaR da carteira analisada quando  $x$  varia de 0 a 105.



O método de mapeamento linear, desponta pois, analiticamente, como aquele mais coerente com as hipóteses efetuadas na construção da estrutura a termo das taxas de juros, onde, elegemos, como fontes básicas de incerteza, as taxas “observadas” para os vértices.

Vejamos agora um exercício empírico para analisar o comportamento do VaR do nosso modelo interno, quando calculado nos termos já descritos, no que diz respeito às volatilidades e correlações, procedendo, contudo, o mapeamento dos fluxos de caixa pelos dois métodos analisados.

Com o objetivo de efetuar um teste empírico dos dois métodos que estamos analisando, foram geradas 1000 carteiras, cada qual com 40 fluxos de valores  $X_i$  e prazo  $T_i$  distribuídos entre os vértices da ETTJ como segue<sup>13</sup>:

6 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[1, 21]$

6 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[22, 42]$

6 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[43, 63]$

6 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[64, 126]$

<sup>13</sup> onde  $X \sim U[a, b]$  significa que a variável aleatória X possui distribuição uniforme entre a e b.

6 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[127, 252]$

5 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[253, 504]$

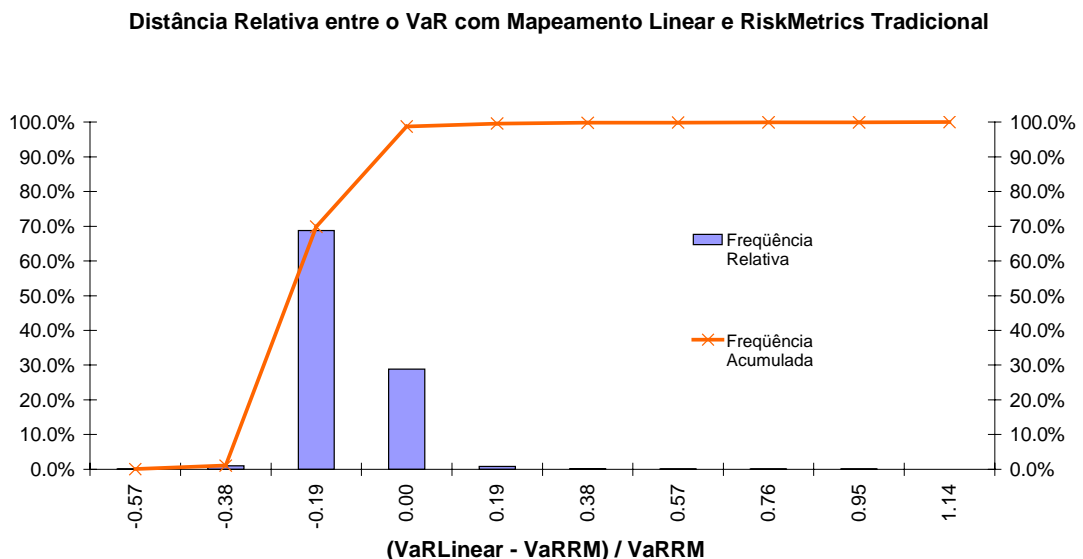
5 Fluxos com valores  $X_i \sim U[-1000, 1000]$  e  $T_i \sim U[505, 756]$

Para tal, calculamos o VaR das 1000 carteiras geradas aleatoriamente, obtendo, portanto, duas medidas, a saber,  $VaR^{Linear}$  quando utilizando o procedimento linear de mapeamento, e  $VaR^{RM}$ , quando utilizando a metodologia tradicional do RiskMetrics.

Construímos a distribuição de freqüência da métrica  $\frac{VaR^{Linear} - VaR^{RM}}{VaR^{RM}}$

isto é, a distância relativa entre as duas medidas de VaR. O gráfico 1 resume os resultados obtidos.

**Gráfico 1– Comparação entre o VaR calculado com Mapeamentos Tradicional e Linear**



Observe-se que, em 68.8% dos casos, a medida de VaR calculada utilizando-se o mapeamento linear situou-se numa faixa cerca de 19% menor do que aquela calculada de acordo com o critério tradicional de mapeamento. As duas medidas são aproximadamente iguais em 28.9% das vezes, e, em 1.1% dos casos o VaR linear é cerca de 38% menor, sendo cerca de 19% maior em 0.8% das situações.

Procedemos também a realização do BackTest agregado para as 1000 carteiras no período de 24/11/97 a 30/04/99. Como, para cada carteira,

podemos estar comprados ou vendidos na mesma, teremos sempre a comparação do VaR previsto contra o resultado da posição comprada e da posição vendida naquela carteira. Os resultados obtidos estão resumidos na tabela 1.

**Tabela 1. BackTest comparativo entre os Mapeamentos Tradicional e Linear**

	<b>Backtest da Posição</b>
<b>Comprada. Mapeamento Tradicional</b>	1.44%
<b>Vendida. Mapeamento Tradicional</b>	1.37%
<b>Comprada. Mapeamento Linear</b>	1.38%
<b>Vendida. Mapeamento Linear</b>	1.31%

*A superioridade do mapeamento linear é contundente. Primeiramente, ele é muito mais simples, além disso, atribui na grande maioria dos casos, um VaR menor do que aquele calculado pelo critério tradicional e, ainda assim, erra menos, como mostra o resultado do BackTest agregado referente a uma amostra de 356.000 pontos, isto é, 1000 “BackTests” de 356 dias.*

*Dessa forma, acreditamos ter apresentado argumentos suficientes para, na construção do “modelo interno de referência”, que norteou a formulação do modelo padrão para taxa de juros, do Banco Central do Brasil, fazer a opção pelo critério linear de mapeamento. Com relação ao termo “Improved Cashflow Map” utilizado no artigo do RiskMetrics Group, é, provavelmente, uma deferência especial aos antigos “vendedores” do método, uma vez que, na verdade, a recomendação de mudança metodológica não provém de nenhum melhoramento efetuado no método anterior, e sim, do seu abandono, por apresentar uma falha de concepção, levando a um comportamento bizarro, no cálculo do VaR de certas carteiras, sempre que determinada relação entre correlações e volatilidades estiver presente. O fato dos dois métodos apresentarem resultados semelhantes na “prática” é uma mera consequência da raridade da condição acima referida, fato que não podemos garantir ex-ante.*

#### BIBLIOGRAFIA

Arcoverde, Guilherme Lins, “Alocação de Capital para Cobertura do Risco de Mercado de Taxa de Juros de Natureza Prefixada” EPGE / FGV, 1999 – Tese de Mestrado

Circular 2972, do Banco Central do Brasil e sua Nota Técnica

JP Morgan RiskMetrics™ Technical Document, 1996

Mina, Jorge “Improved Cashflow Map”, The RiskMetrics Group, 1999

Guilherme Lins Arcoverde é Assessor Sênior do DEPEP, Departamento de Pesquisas do Banco Central do Brasil.