Mapeamento de Instrumentos Financeiros em Fatores de Risco

Pedro Luiz Valls Pereira
pvalls@ibmec.br

1. Estrutura de Mapeamento: O que é e porque fazê-lo

Em geral, um portfólio de uma instituição de grande porte é composto por milhares de diferentes tipos de ativos. **O grande número de ativos de uma carteira cria** duas **dificuldades para estimação do VaR** uma prática e outra teórica.

Do ponto de vista prático, é computacionalmente **custoso estimar a matriz de covariâncias** Σ. Note que o número de parâmetros a estimar cresce geometricamente com o número de ativos da carteira. A cada novo ativo introduzido, é preciso estimar outros n (número total de ativos da carteira após a introdução de um novo novo ativo) parâmetros, o desvio-padrão deste novo ativo e as n-1 covariâncias com todos os outros ativos da carteira. Além disso, para a estimação da matriz de covariância e os betas dos ativos é preciso contar com um banco de dados com séries histórias de todos ativos da carteira o que pode ser impossível para ativos de origem recente ou com pouca negociação no mercado.

Do ponto de vista teórico, tem-se a restrição de que Σ **precisa ser positiva semi-definida**[i] isso gera duas restrições adicionais. A primeira é que o número de observações na série histórica utilizada na estimação precisa ser no mínimo igual a dimensão de Σ dada pelo número de ativos na carteira. A segunda é que não pode haver correlação perfeita entre nenhuma das séries históricas. Assim, pode ser problemática a introdução de ativos que apresentam movimentos muito semelhantes (correlação próxima de um).

Para reduzir a dimensão da matriz de covariância Σ a ser estimada e com isso, facilitar a implementação do método, foram criadas as chamadas estruturas de mapeamento. Existem dois tipos de **estrutura de mapeamento**, a **referencial** e a **quantitativa**.

2. Escolha de fatores de risco

O **mapeamento referencial** é o adotado pela metodologia *Riskmetrics* e consiste em **eleger um conjunto de ativos referência** para o qual a **posição em todos os outros ativos é mapeada**. O *Riskmetrics* seleciona como **ativos de referência às moedas** mais negociadas, **índices das principais bolsas do mundo**, **vértices fixos da curva de juros** e **commodoties**. A metodologia utiliza então algumas técnicas para transformar posições nos ativos originais em posições sintéticas nos ativos referência, o mapeamento propriamente dito, para as quais calcula-se o VAR.

Assim, por exemplo, uma posição numa determinada ação na bolsa brasileira é convertida em uma posição no índice IBOVESPA ou uma posição num ativo de renda fixa americana com maturidade qualquer é convertido em posições nos prazos referência. Mais à frente, apresenta-se em detalhes a técnica utilizada no mapeamento de ações, de contratos futuros, de swaps, de opções, de títulos públicos, de instrumentos de renda fixa e de ADR´s.

O **mapeamento quantitativo** consiste na aplicação de técnicas de **análise fatorial** e **componentes principais** as séries de preços. Tal técnica tem como objetivo **identificar componentes independentes que expliquem movimentos comuns** em todas as séries. Os componentes principais ou fatores são variáveis hipotéticas construídas para explicar tais movimentos. Em algumas situações, por exemplo, para a estrutura a termo de taxas de juros, três componentes são suficientes e estão associados a movimentos destas curvas de juros, a saber, o primeiro componente está associado a deslocamentos paralelos da curva, o segundo está associado a mudanças na inclinação e o terceiro está associado a torções na curva. Os preços dos ativos podem então ser expressos como funções destas variáveis independentes. Com isso, consegue-se uma redução significativa da dimensão da matriz de covariâncias que, devido à independência dos componentes ou fatores, passa a ser uma matriz diagonal.

O **problema com este método** é que a necessidade de imposição da **hipótese** de que os **retornos são independentes e identicamente distribuídos**, o que pode são ser verdadeiro.

3. Mapeamento de Opções

A ampla literatura na área de **opções** mostra que estes instrumentos guardam uma **relação não linear com o ativo subjacente**. No caso do modelo de Black & Scholes (1973), certamente o mais conhecido, o preço de uma *Call* depende, além do preço do ativo subjacente, de um conjunto de variáveis: taxa de juros livre de risco, tempo para o exercício, preço de exercício e do desvio padrão (volatilidade) do ativo subjacente. Segundo este modelo, a expressão do preço de uma Call européia é dada por:

$$C_t = S_t\ N(d_1) - X\ e^{-r(T-t)}\ N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\ \sqrt{T-t}$$

onde:

S_t é o preço da ação a que a opção se refere
$N(x)$ é a função densidade acumulada de uma normal padrão,
X o preço de exercício da opção
r a taxa de juros livre de risco
$T - t$ o tempo que resta para o exercício da opção
σ a volatilidade do retornos do ativo objeto.

A expansão de Taylor da função $F(S)$ é dada por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS^2 + ... + \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial t} dt + R$$

esta expansão evidencia as diversas fontes de variação do preço de uma opção. As diversas derivadas parciais da equação acima são conhecidas como **gregas**, da direita para a esquerda: Delta, Gamma, Rho,Vega e Theta. A gregas exprimem o **risco de variação do preço de uma opção derivado de variações nos valores das variáveis que entram no modelo de Black & Scholes**. Termos de ordem superior estão contidos no resto da expansão de Taylor, denotado por R.

Se considerarmos nulos todos as gregas da expressão acima com exceção do delta tem-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} dS$$

Assim, uma posição em opção é equivalente, em termos de variação, a uma posição de $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ unidades do ativo subjacente o que permite o mapeamento de posições de opções em posições no ativo subjacente.

Assim uma posição de valor *nF* em contratos de opções (*n* = número de contratos, *F* = preço das opção) vai apresentar um risco equivalente a $n\Delta S$ do ativo subjacente, e pode ser mapeada como uma quantidade $n\Delta$ deste ativo.

4. Mapeamento de Fluxos de Renda Fixa

O *Riskmetrics* seleciona um conjunto de maturidades, também chamados de **vértices**, para os quais efetua-se o cálculo de volatilidades e correlações. Para instrumentos com prazos diferentes dos referenciais é preciso encontrar uma posição equivalente nos vértices. O princípio adotado para cálculo é que a **posição mapeada deve ter o mesmo valor de mercado e a mesma volatilidade da posição original**. Como exemplo, suponha que se deseja estimar o VAR para uma posição de 6 meses, mas só existem vértices de 5 e 7 meses, então torna-se necessário a aplicação da estrutura de mapeamento. Como o valor de mercado mapeado tem que ser igual ao valor de mercado original tem-se:

$$I_6 = \alpha I_5 + (1-\alpha) I_7 \quad (1)$$

O problema é encontrar α. Pela equação acima têm-se que a variância dos retornos do instrumento de 6 meses é igual a:

$$\sigma_6^2 = \alpha^2 \sigma_5^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_7^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{5,7}\sigma_5\sigma_7 \quad (2)$$

onde $\rho_{5,7}$ é a correlação entre os vértices 5 e 7. A equação acima poderia ser resolvida se todos os termos fossem conhecidos, mas σ_6^2 não é. Supondo que σ_6^2 é uma combinação linear de σ_5^2 e σ_7^2, isto é,

$$\sigma_6^2 = \omega\sigma_5^2 + (1-\omega)\sigma_7^2 \qquad 0 \le \omega \le 1 \qquad (3)$$

onde ω é a distância relativa entre o vértice mapeado e os vértices de referência (no caso 0,5). Substituindo (3) em (2), temos uma equação de segundo grau para α, cuja solução é dada por:

$$\alpha = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$$

onde, $a = \sigma_5^2 + \sigma_7^2 - 2\rho_{5,7}\sigma_5\sigma_7$, $b = 2\rho_{5,7}\sigma_5\sigma_7 - 2\sigma_7^2$ e $c = \sigma_7^2 - \sigma_5^2$.

Escolhe-se a solução α que esteja entre 0 e 1. Com o valor obtido acha-se as posições nos vértices equivalentes utilizando a equação (1) e em seguida calcula-se o VAR para estas posições da maneira usual.

5. Mapeamento de Ações

Um resultado amplamente conhecido do modelo **Capital Asset Pricing Model** (CAPM) é que o retorno de uma ação específica (R_A) se relaciona com o retorno do mercado (R_m) - um ativo composto, por exemplo, um índice de ações - da seguinte forma:

$$R_A = \alpha_A + \beta_A R_m + \varepsilon_A$$

onde, α_A é uma constante específica à firma, $\beta_A R_m$ a parcela do retorno da firma que é explicada por movimentos do mercado e ε_A um componente aleatório específico à firma. Segue-se que a variância do retorno da firma é dada por:

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_A}^2$$

Pela expressão acima, percebe-se que o risco da firma é composto de duas partes um associada ao mercado e outra específica a ela. Então, assumindo normalidade, o VAR de uma posição na ação A cujo valor de mercado é P_A é dado por:

$$VaR_A = z_{1-\alpha\%}\,\sigma_A P_A = z_{1-\alpha\%}\,P_A\sqrt{\beta_A^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_A}^2}$$

onde $z_{1-\alpha}$ é o quantil $1-\alpha\,\%$ de uma normal padrão

Se o risco específico for desprezível então o VaR torna-se:

$$VaR_A = z_{1-\alpha\%} \; P_A \beta_A \sigma_m$$

Desta forma, para o cálculo de risco, uma posição de P_A na ação é equivalente a uma posição de $\beta_A P_a$ no ativo de mercado. O problema com esta técnica de mapeamento é que ao desprezar o risco específico, procedimento este sem nenhuma justificativa[ii], subestima-se o verdadeiro risco do ativo. Além disso, resta o problema de estimar o β da ação, portanto, não eliminando a necessidade de uma série histórica da ação.

6. Mapeamento de Variação Cambial

Qualquer fluxo denominado em dólares, que seja liquidado em reais, ou fluxo de reais que seja liquidado em dólares está sujeito ao risco de variação cambial. De forma genérica, isso vale para quaisquer operações que, liquidamente, envolvam pelo menos dois fluxos denominados em moedas distintas.

Nesse caso, no momento do vencimento da operação, deve-se possuir a moeda de liquidação em caixa, ou adquiri-la no mercado, à taxa de câmbio vigente. Isso coloca a possibilidade de a taxa de câmbio no vencimento ser diferente da esperada no instante inicial em que a operação foi realizada. O risco advindo desse tipo de descasamento de moeda entre ativo e passivo é denominado risco de variação cambial.

Basicamente, utilizando como exemplo o dólar, um fluxo qualquer em dólares no futuro pode ser mapeado como seu MtM em reais, à taxa de câmbio vigente, exposto à volatilidade do dólar (sugere-se o uso da Ptax por ser o dólar utilizado para a liquidação da maioria das operações financeiras).

$ValorPosição = Fluxo_{US\$} \times TC$, onde TC é a taxa de câmbio.

Essa regra é incrivelmente geral, e vale para qualquer ativo ou contrato financeiro que possua pelo menos um de seus fluxos denominado em dólares. O mesmo vale para qualquer outra moeda.

7. Mapeamento de Contratos Futuros de Dólar

Devido a ausência de arbitragem entre os mercados de juros domésticos, de cupom cambial, de Dólar à vista e Dólar futuro pode ser escrito da seguinte forma:

$$F_{t,T} = S_t \frac{1+i_{t,T}}{1+c_{t,T}}$$

onde $F_{t,T}$ é o preço futuro do dólar em T, na data t, S_t é o preço spot do Dólar no instante t, $i_{t,T}$ é a taxa de juros a vigorar na economia entre t e T e $c_{t,T}$ é a taxa do cupom cambial a vigorar na economia entre t e T.

A variação percentual do preço futuro do dólar é dada por:

$$\frac{F_{t,T} - F_{t-1,T}}{F_{t-1,T}} \approx \Delta \ln(F_{t,T}) = \Delta \ln(S_t) + \Delta \ln(1 + i_{t,T}) - \Delta \ln(1 + c_{t,T}) \Rightarrow r_F = r_S + r_i - r_c$$

onde r_F são os retornos dos contratos futuros de dólar, r_S são os retornos do dólar à vista, r_i são os retornos da taxa-pré e r_c são os retornos da taxa de cupom.

Pela expressão acima tem-se a **decomposição do risco de uma posição** comprada em **dólar** no **risco** de uma **posição comprada** de **dólar** no mercado **à vista**, de uma **posição vendida** de **cupom cambial** e de uma **posição tomada** em **pré**.

8. Mapeamento de Contratos Futuros de DI-1 dia da BM&F

As potenciais fontes de risco dos contratos futuros de DI-1 são as variações na curva de juros uma vez que o valor da posição é dado por:

$$ValorPosição = \frac{100.000}{1 + i_{t,T}}$$

Quando o número de dias úteis estiver entre dois vértices da curva de juros o mapeamento é feito conforme o descrito em 4 acima.

9. Mapeamento de Contratos Futuros de Cupom Cambial

O risco dos contratos futuros de **d**iferencial entre a taxa média de **d**epósitos **i**nterfinanceiros de um dia e a taxa de câmbio de reais por dólar comercial (**DDI**) é mapeado em **dois fatores primitivos** de risco: **risco de variação cambial e risco de cupom cambial**.

O contrato de DDI é denominado em dólares (US$50.000,00) e liquidado em reais. Por um lado dado que este contrato é liquidado em reais, ele está exposto ao risco de variações na taxa de câmbio. Por outro lado como é um fluxo futuro de dólares, este contrato está exposto a variações na taxa do cupom cambial. O risco do fator cupom cambial é o fluxo de US$50.000,00 para a data de vencimento, marcado a mercado pela taxa da curva de cupom, $\frac{US\$50.000{,}00}{1 + c_{t,T}}$, e o risco no fator de variação cambial como 50.000 x TC.

10. Mapeamento de Contratos Futuros de Índice Bovespa

É o valor financeiro da posição que é considerado, isto é
$ValorPosição = n \cdot NC \cdot F_{IBOV}$
onde n = 3 é o valor em reais de cada ponto do índice, F_{IBOV} é a cotação do Contrato Futuro de IBOVESPA e NC é o número de contratos da posição.

11. Mapeamento de *Swaps*

Os *swaps* que serão considerados são: CDI x PRÉ, PRÉ x Dólar e CDI x Dólar. No caso dos *swaps* o detalhamento que será feito está relacionado à maneira de marcar a mercado o *swap*. A marcação a mercado de um *swap* genérico
pode ser representada pela seguinte expressão:

$$MtM_{t,T}^{SWAP} = \frac{VI(1+i_{t,T}^{ATIVO}) - VI(1+i_{t,T}^{PASSIVO})}{1+i_{t,T}}$$

onde $MtM_{t,T}^{SWAP}$ representada o valor de mercado no instante t de um *swap* com vencimento em T, VI é o valor inicial da operação com vencimento em T, $i_{t,T}^{ATIVO}$ é o fator que corrigi a ponta comprada do *swap*, $i_{t,T}^{PASSIVO}$ é o fator que corrigi a ponta vendida do *swap* e $i_{t,T}$ é o fator de desconto dado pela curva de juros.

Pela expressão acima fica claro que são **três as potenciais fontes de risco: mudanças na taxa da ponta ativa, mudanças na taxa da ponta passiva e mudanças na curva de juros**. Para efeito de um sistema de risco o *swap* pode ser tratado como duas posições distintas, uma comprada e outra vendida.

É importante observar que a **ponta do *swap* corrigida pelo CDI**, quando existir, **não representa risco** para a instituição financeira, um vez que se trata da taxa que remunera o capital livre de risco da instituição.

11.1 *Swaps* PRÉ x CDI

Para o *swap* PRÉ x CDI **apenas a ponta da taxa-pré é marcada a mercado** pela curva de juros, entrando diretamente como fator de risco-pré. Isto é, um fluxo dado por $F_T = VI(1+i_{t,T}^{PRE})$ é acrescentado ao fator de risco taxa de juros doméstica no período T e marcada como $F_{t,T} = \frac{VI(1+i_{t,T}^{PRE})}{(1+i_{t,T})}$ com sinal dado pela ponta em que o fluxo se encontra, isto é, positiva se ativa ou negativa se passiva.

11.2 *Swaps* PRÉ x Dólar

O *swap* CDI x Dólar é **mapeado em risco de pré, risco de variação cambial e risco de cupom**. A parte pré é mapeada conforme 11.1. A parte do dólar consiste num fluxo conhecido, em reais, na data de vencimento do *swap,* remunerado pela taxa acordada. Este fluxo em dólares para a data de vencimento é marcado a mercado pela taxa da curva de cupom. Desta forma é possivel decompor o risco da ponta dólar do *swap* em um fluxo em reais hoje, exposto à variação cambial e num fluxo em dólares hoje exposto ao risco de cupom. Formalmente temos:
$F_{t,T}^{R\$} = VI$ onde $F_{t,T}^{R\$}$ é o valor da operação sujeito à variação cambial, $F_{t,T}^{US\$} = \dfrac{VI / DolCom}{1 + c_{t,T}}$ onde $F_{t,T}^{US\$}$ é o fluxo em dólares sujeito ao risco de cupom, de taxa $c_{t,T}$ para o período e $DolCom$ é o dolar comercial (Ptax).

11.3 *Swaps* Dólar x CDI

Como o CDI não representa risco para a instituição financeira **apenas a ponta dólar é mapeada** conforme o descrito acima em 11.2

11. Mapeamento de *Títulos Públicos*

Títulos públicos (NTNs, LTNs, BBCs, etc.) são tratados como ativos de renda fixa e têm o seu fluxo de pagamentos descontado a valor presente pela curva de juros.

A metodologia aplicada aos títulos é identica à utilizada para os contratos futuros de DI-1, apresenta acima em 10.

Uma menção especial deve ser feita a títulos indexados à variação cambial, como as NTN-d. Nesse caso, utiliza-se metodologia semelhante à aplicada à ponta em dólar das *swaps*, isto é, trata-se de um fluxo em reais, na data de vencimento do papel convertido em dólares hoje pela cotação da moeda na data da compra do título e reconvertido em reais pela taxa de câmbio corrente e de um fluxo em dólares correspondente ao valor de resgate do título na data de vencimento marcado a mercado pela taxa da curva de cupom.

Desta forma é possível decompor o risco da ponta dólar do *swap* em um fluxo em reais hoje exposto à variação cambial e num fluxo em dólares hoje exposto ao risco do cupom.

12. Mapeamento de *Bradies*

O mapeamento de *Bradies* brasileiros pode ser feito da mesma forma que o de ações, utilizando-se um título mais líquido como o C-Bond como fator primário de risco e um beta calculado com referência a esse título.

13. Mapeamento de *ADRs(American Deposits Receipts)*

O mapeamento de ADRs é feito considerando-se a ação como se fosse detida no Brasil, juntamente com uma posição comprada em dólares. Nesse caso, ao risco da posição em bolsa é agregado o risco da variação cambial de uma posição equivalente em dólares.

---

[i] Uma matriz Σ nxn é dita ser positiva semi-definida se para todo vetor ω, nx1, $\omega > 0$, tem-se $\omega'\Sigma\omega \geq 0$.

[ii] Se esta carteira é bem diversificada este risco desaparece quando $n \rightarrow \infty$.