

# Metodologias de Cálculo de VaR

Luiz Alvares Rezende de Souza  
[lalvares@ibmec.br](mailto:lalvares@ibmec.br)

## 1.1 Definição de Valor em Risco (*Value-at-Risk*)

Define-se genericamente o Valor em Risco (*value-at-risk*)  $VaR_t$ , de uma carteira de valor  $\Pi_t$ , no período  $t$ , como:

$$\Pr\{\Delta\Pi_t \leq VaR_t\} = \alpha\% \quad \text{onde: } \Delta\Pi_t = \text{variação no valor da carteira de preço } \Pi_t \\ \alpha\% = \text{nível de significância}$$

Isto é, o  $VaR$  é a perda máxima esperada da carteira, a um nível de significância de  $\alpha\%$  (ou nível de confiança de  $1-\alpha\%$ ), dentro de um horizonte de tempo determinado. É importante observar que se trata de uma medida monetária, dado que a variável aleatória, nesse caso, é a variação de valor da carteira. Por exemplo, um  $VaR$  diário de R\$100.000 com um nível de significância de 5%, equivale a dizer que uma perda maior ou igual a R\$100.000 deve ser registrada a cada 20 dias, ou ainda, que de cada 100 dias, apenas cinco deles devem ter perdas superiores a R\$ 100 mil.

Definindo os retornos da carteira  $\Pi$  como  $r_t = \frac{\Pi_t - \Pi_{t-1}}{\Pi_{t-1}}$ , pode-se trabalhar com o  $VaR$  em termos da distribuição dos retornos da carteira, isto é:

$$\Pr\left\{\left(\frac{\Delta\Pi_t}{\Pi_{t-1}}\right)\Pi_{t-1} \leq VaR_t\right\} = \alpha\% \Rightarrow \Pr\{r_t \leq VaR_t \Pi_{t-1}^{-1}\} = 1 - \alpha\%$$

E pode-se definir um novo  $VaR_t^*$  em termos de retornos:

$$\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\} = 1 - \alpha\%$$

sendo que o  $VaR$  monetário pode ser facilmente obtido como:

$$VaR_t = VaR_t^* \Pi_{t-1}$$

O  $VaR$  pode se referir a diferentes horizontes de tempo. Pode ser calculado em bases semanais, mensais, anuais, etc.. Nesse caso, será um  $VaR$  multiperíodo se

for estimado com dados de frequência maior do que o período de interesse. Seria o caso de se utilizar retornos diários para estimar um VaR semanal (5 dias ou períodos). Modelos mais complexos são exigidos para esse tipo de previsão, dado que é necessária a agregação das perdas esperadas em cada um dos períodos, levando em conta a eventual dependência temporal entre elas. Modelos da família ARCH desempenham bem esse papel. Uma alternativa mais simples é a utilização de um VaR de um único período, mas estimado com base em retornos do período de interesse, nesse caso, retornos a cada 5 dias.

A grande vantagem da utilização do VaR é o fato de representar uma medida de risco de mercado<sup>1</sup> em apenas um número. O que não pode ser esquecido, contudo, é que se trata de uma medida probabilista. Ela não diz nada a respeito da magnitude das grandes perdas. Isso quer dizer que no exemplo acima de um VaR de R\$100.000 a cada 20 dias, pode-se ter 19 dias com lucros, ou perdas menores do que R\$100.000, mas no último dia registrar-se um perda de R\$1.000.000 sem que o VaR seja violado.

## 1.2 Metodologias Paramétricas versus Não-Paramétricas

A definição de VaR dada acima é bem geral, e as variações entre os diversos modelos de estimação de valor em risco se darão através de como é especificado o cálculo da probabilidade  $\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\}$ . Suponha que essa probabilidade seja dada por:

$$\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\} = \int_{-\infty}^{VaR_t^*} f(r_t) dr_t = \alpha\%$$

Será a especificação de  $f(\bullet)$ , ou *parametrização* de  $f(\bullet)$ , que determinará o valor de  $VaR_t^*$ . Nesse caso, tem-se um *VaR paramétrico*, dependente basicamente das hipóteses feitas à respeito da distribuição da variável aleatória  $r_t$ . Supondo-se que os retornos da carteira sejam normalmente distribuídos, com média  $\mu_t$  e variância  $\sigma_t^2$ , pode-se escrever<sup>2</sup>:

$$\Pr\left\{\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} \leq Z_{\alpha\%}\right\} = \int_{-\infty}^{Z_{\alpha\%}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \alpha\%$$

onde  $Z_{\alpha\%}$  é o quantil correspondente a  $\alpha\%$  de uma Normal Padrão. Por exemplo, se  $\alpha\% = 5\%$ ,  $Z_{5\%} \cong -1.65$ .

<sup>1</sup> Todas as menções à palavra *risco* feitas nesse trabalho referem-se estritamente ao *risco de mercado*, a menos se especificado em contrário.

<sup>2</sup> Aqui tanto o parâmetro da média quanto o da variância são indexados por  $t$  para se manter o caráter de generalidade. Por exemplo, se a hipótese de normalidade for feita sobre a distribuição condicional dos retornos, i.e., sobre  $r_t | \Pi_{t-1}$ , pode-se ter um modelo que descreva o comportamento tanto da média quanto da variância condicionais, como é o caso dos modelos Garch. Nesse caso, as estimativas de  $\mu$  e  $\sigma$  variariam ao longo do tempo.

Supondo-se nula a média dos retornos<sup>3</sup>, o valor em risco da carteira seria dado por<sup>4</sup>:  
 $VaR_t^* = \mu_t + \sigma_t Z_{\alpha\%} = -1.65\sigma_t$  e  $VaR_t = -1.65\sigma_t \Pi_{t-1}$ .

De outra forma, para uma amostra de tamanho  $T$ , de retornos i.i.d., suponha que:

$$\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T I_{\{r_i < VaR_t^*\}} = \alpha\%$$

onde:  $I_{\{\cdot\}}$  é a função indicador:  $I_{\{r_i < VaR_t^*\}} = \begin{cases} 1, & \text{caso } r_i < VaR_t^* \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$

isto é, que a probabilidade da ocorrência de um retorno menor do que  $VaR^*$  seja dada pela distribuição empírica observada de  $r$ . Trata-se de um caso típico de um *VaR não-paramétrico*. Nesse caso específico, a única escolha a ser feita diz respeito ao tamanho da amostra  $T$  a ser utilizada<sup>5</sup>.

São muitas as possibilidades de especificação paramétrica e não paramétrica de  $\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\}$  sendo que cada uma apresenta suas próprias hipóteses, vantagens e desvantagens. As mais comuns serão tratadas a seguir.

### 1.3 VaR sob a Hipótese de Normalidade

A hipótese usual é a de que os retornos dos fatores de risco são normais. Isso permite escrever o VaR de uma carteira como:

$$VaR(\alpha\%) = -\Pi_{t-1} Z_{1-\alpha\%} \hat{\sigma}$$

onde  $Z_{1-\alpha\%}$  é o quantil de uma normal padrão ( $z_{95\%} = 1.65$ ,  $z_{99\%} = 2.33$ ).

Nesse caso, para uma amostra (ou janela) de  $T$  observações, o estimador não

condicional de  $\sigma_t$  é  $\hat{\sigma}_t = \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (r_i - \bar{r})^2}$ , onde  $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i$ .

<sup>3</sup>A hipótese de que  $\mu_t = 0$  é bastante comum, e fundamenta-se na observação empírica. Isso pode ser verificado em mais detalhes no capítulo 3, onde se mostra que as quatro séries estudadas neste trabalho apresentam média nula. Na literatura a hipótese de média nula dá origem ao conceito de *VaR absoluto*. O *VaR relativo* é aquele que considera a média diferente de zero na estimação.

<sup>4</sup>Lembrando-se que:  $\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\} = \Pr\{r_t \leq \mu_t + \sigma_t Z_{\alpha\%}\} = \alpha\%$

<sup>5</sup>A determinação de  $T$  apresenta-se como um problema típico de “largura de banda” (*bandwidth*) de estimação não-paramétrica. A estimação do VaR é sensível ao tamanho da janela utilizada, e não é claro se todas as informações disponíveis devem ser utilizadas, dado que podem estar bastante distantes no tempo e ter muito pouco a dizer sobre as características da distribuição dos retornos da carteira no momento presente. Por outro lado uma janela muito pequena produzirá excessivas flutuações no valor de  $VaR_t^*$ .

Note que o VaR é dado pelo limite inferior do intervalo de confiança unicaudal para o retorno da carteira ao assumir-se<sup>6</sup> que  $r_t \sim N(\bar{r}, \hat{\sigma}^2)$ .

A hipótese de retornos normais i.i.d., contudo não apresenta aderência com a realidade. A alternativa é substituí-la por uma hipótese sobre a distribuição condicional dos retornos:

$$r_t \sim N(\mu, \sigma_t^2)$$

Um processo adequado para modelar a variância condicional poderia ser um modo um modelo do tipo GARCH(p,q) (*Generalized Autoregressive Conditional Heterokedasticity*):

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \omega > 0, \quad \alpha_i, \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

A sugestão proposta no RiskMetrics, e largamente a mais utilizada no mercado é a do EWMA (*Exponencially Weighted Moving Average*):

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2$$

Observando atentamente, o EWMA nada mais é do que uma restrição sobre o modelo GARCH(p,q), onde:

$$p = 1, \quad q = 1, \quad \omega = 0, \quad \alpha = 1 - \lambda, \quad \text{e} \quad \beta = \lambda$$

O inconveniente é que este modelo implica distribuição não-condicional degenerada para os retornos.

## 1.4 Simulação Histórica

Supondo-se que a distribuição dos retornos seja não-padrão, e que não se queira fazer hipóteses adicionais sobre ela, pode-se utilizar a própria distribuição dos retornos realizados da carteira, a fim de se calcular não-parametricamente o quantil correspondente ao nível de significância do VaR de  $\alpha\%$  desejado.

---

<sup>6</sup> Existe a possibilidade de se considerar distribuições alternativas. A primeira que surge à mente é a de uma distribuição t-Student, que permite caudas mais pesadas e tem o importante apelo de ser o candidato natural à modelagem da variável aleatória  $r_t / \sigma_t$  se os retornos forem assumidos normais, pois  $\sigma_t$  é desconhecido e deve ser estimado. Nesse caso, o VaR seria dado pelo limite inferior do intervalo:  $VaR(\alpha\%) = -\Pi_{t-1} t_{\alpha\%}(v) \hat{\sigma}$ , onde  $t_{\alpha\%}(v)$  é o quantil de uma t com os v graus de liberdade utilizados para estimar  $\hat{\sigma}$ . Repare que esse valor converge para o de uma Normal se T for muito grande.

Isto é, dada uma amostra de retornos  $\chi_T = \{X_1, \dots, X_T\}$ , ordenam-se as observações<sup>7</sup>  $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_T$  e toma-se o estimador de  $\hat{X}_{\alpha\%} = \frac{X_{[\alpha\%T]} + X_{[\alpha\%T+1]}}{2}$  para  $T$  par<sup>8</sup>.

A partir da estimativa do quantil empírico  $X_{\alpha\%}$  dos retornos, é possível contruir-se o  $VaR(\alpha\%)$  como  $VaR(\alpha\%) = \Pi_{t-1} \hat{X}_{\alpha\%}$ .

Apesar do nome de **simulação histórica**, num estágio simples como esse, não há simulações envolvidas. A idéia é se utilizar a própria distribuição empírica dos retornos passados da carteira ou ativo, com o argumento de que ela reproduz da melhor maneira possível a verdadeira distribuição. O método é robusto a distribuições de caudas pesadas, mas baseia-se numa única realização do processo gerador dos dados (uma única trajetória de preços é observada na prática). É necessária a hipótese de retornos i.i.d. (independentes e identicamente distribuídos), exigindo-se portanto que a distribuição permaneça estável ao longo do tempo.

#### 1.4.1 Estimador de *Bootstrap* das Estatísticas de Ordem

Apesar de a simulação histórica ser uma alternativa à não normalidade dos retornos, ela sofre de um mal que é a elevada variância das estatísticas de ordem, principalmente nos extremos, além de se basear numa única realização do processo. Uma forma de amenizar esse problema é utilizar-se o estimador de *bootstrap* do quantil  $X_{\alpha\%}$ . Ele pode ser calculado sorteando-se, aleatoriamente,  $n$  subamostras  $\chi_{T_1}^* = \{X_1^*, \dots, X_{T_1}^*\}$ , de tamanho  $T_1$  ( $T_1 < T$ ), e com reposição, a partir de  $\chi_T$ . A partir daí, ordena-se crescentemente cada uma das  $n$  amostras, estimando-se  $X_{\alpha\%}$  da maneira mencionada em 2.4, para cada uma delas, obtendo-se uma estimativa de  $X_{\alpha\%}$  para cada subamostra. É possível mostrar através do teorema central do limite que a distribuição do estimador de *bootstrap*

$\hat{X}_{\alpha\%} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{X}_{\alpha\%}^{(i)}$ , converge para uma  $N\left(X_{\alpha\%}, \frac{V(X_{\alpha\%})}{n}\right)$ . Obtém-se assim um

estimador com menor variância para a estatística de ordem  $X_{\alpha\%}$ . A idéia é que o *bootstrap* permite a obtenção de estatísticas de ordem de melhor qualidade, principalmente quando as amostras são pequenas. Porém, continua o problema de não se ter muito a dizer sobre a probabilidade de perdas maiores do que o valor mínimo observado na amostra.

<sup>7</sup> As observações ordenadas desta maneira recebem o nome de *estatísticas de ordem*. A definição formal encontra-se na seção 4.1.1.

<sup>8</sup> Os colchetes  $[\cdot]$  definem a parte inteira da operação.  $X_{[\alpha\%T]}$ , portanto, refere-se ao retorno que ocupa a posição correspondente a  $\alpha\%$  das observações, numa amostra ordenada de maneira crescente. Para  $T$  ímpar utiliza-se  $\hat{X}_{\alpha\%} = X_{[\alpha\%T+1]}$ .

## 1.5 Simulação de Monte-Carlo

A simulação de Monte-Carlo é indicada apenas quando as abordagens tradicionais como a simulação histórica e o VaR normal não são apropriadas. Isso se deve principalmente ao custo computacional de implementação e processamento.

Para compreender a metodologia, comecemos pelo caso do VaR de um único ativo (ou fator de risco) cujos logaritmos dos preços sigam um processo bem simples:

$$dp_t = \sigma dZ_t$$

Onde  $p$  descreve o logaritmo do preço do ativo (ou fator de risco),  $s$  é a volatilidade e  $Z$  é uma variável aleatória normal padrão.

Tomando-se uma discretização aproximada para essa equação, quando  $dt=1$ :

$$p_t = p_{t-1} + \sigma Z_t \sqrt{\Delta t} = p_{t-1} + \sigma Z_t$$

Para simular o preço do ativo entre o período atual e  $h$  períodos à frente, obtém-se:

$$p_{t+h} = p_{t-1} + \sigma \sum_{j=1}^h Z_{t+j-1}$$

Dessa forma, a partir do último preço disponível para o ativo (ou fator de risco), de sua volatilidade e de realizações aleatórias de  $Z$ , é possível a cada simulação, obter-se um preço para o ativo,  $h$  períodos à frente (no caso do VaR multiperíodo). Repetindo-se este processo alguns milhares de vezes, é possível obter-se a distribuição inteira de suas perdas e tomar-se o quantil de  $\alpha\%$  como o seu VaR.

No caso de uma opção, por exemplo, deve-se reprecificá-la em cada uma das simulações no dia  $t+h$  e utilizar-se a distribuição dos preços da opção e não do ativo.

A extensão para carteiras é bastante direta, e o maior problema advém do aspecto computacional de reavaliação da carteira em cada um dos cenários gerados por Monte-Carlo:

Para o caso se uma carteira (ou conjunto de fatores de risco):

$$\begin{bmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \\ \vdots \\ p_{k,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,t-1} \\ p_{2,t-1} \\ \vdots \\ p_{k,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ \vdots \\ Z_{k,t} \end{bmatrix}$$

Em notação matricial:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{Z}_t \quad \text{ou} \quad \Delta \mathbf{p}_t = \Delta \mathbf{p}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{Z}_t$$

E onde  $\mathbf{A}$  é obtida a partir da decomposição de Cholesky da matriz de covariâncias  $\Sigma$  dos ativos (fatores de risco), isto é,  $\mathbf{A}$  é tal que:

$$\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

A idéia é que  $\mathbf{A}$  será uma "matriz raiz quadrada" de  $\Sigma$ , e fará o papel de padronizar os choques aleatórios para que os retornos dos diversos fatores apresentem as mesmas volatilidades e correlações que os dados originais.

De posse dos cenários de preços gerados, reavalia-se a carteira em cada um deles, obtendo-se a distribuição de suas perdas, como no caso de um único ativo.

## 1.6 Agregação do VaR tradicional para uma carteira de Ativos

Tudo o que foi dito até aqui para o cálculo de VaR de um único ativo pode ser facilmente estendido para carteiras. A raiz do problema da agregação do VaR de portfólios está no fato de que os movimentos dos preços dos ativos componentes de uma carteira são correlacionados uns com os outros. Isso implica que se A e B compõem uma carteira, e se seus retornos possuírem, por exemplo, correlação negativa, a queda no preço de A deve ser acompanhada de um aumento no preço de B, reduzindo a oscilação de preço da carteira como um todo, e produzindo um menor nível de risco em relação à soma dos riscos individuais.

Suponha que a carteira de valor  $II$  e retorno  $r_p$  seja formada por um conjunto de ativos  $i = 1, \dots, n$ , de retornos  $\mathbf{R} = [r_1, r_2, \dots, r_n]'$ , e participações  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]'$ , tais que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

Além disso, definindo  $\Sigma = COV(\mathbf{R}) = E[(\mathbf{R} - E\mathbf{R})(\mathbf{R} - E\mathbf{R})']$  como a matriz de covariância dos retornos,  $\mathbf{C} = CORR(\mathbf{R})$  como a sua matriz de correlação, e  $\boldsymbol{\sigma} = diag[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$  como uma matriz diagonal com desvios-padrão dos retornos.

Definindo-se ps retornos da carteira como

$$r_p = \mathbf{w}'\mathbf{R}$$

tem-se que a variância dos retornos da carteira será

$$\sigma_p^2 = VAR(r_p) = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} \quad \text{ou} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{w}$$

Assumindo-se que os retornos sigam distribuição Normal<sup>9</sup>, é possível como em 2.3, tomar-se o limite inferior do intervalo de confiança de  $r_p$  para o cálculo do VaR:

$$VaR_t^* = -\sigma_p Z_{1-\alpha\%} \quad \text{e} \quad VaR_t = -\sigma_p Z_{1-\alpha\%} \Pi_{t-1}$$

Além disso, lembrando que:

$$VaR_t^p = -\sqrt{\mathbf{w}\sigma \mathbf{C}\sigma \mathbf{w}'} Z_{1-\alpha\%} \Pi_{t-1} = -\sqrt{\mathbf{w}\Sigma \mathbf{w}'} Z_{1-\alpha\%} \Pi_{t-1}$$

e que o VaR de um ativo  $i$  pode ser escrito como:

$$VaR_t^i = -\sigma_i Z_{1-\alpha\%} w_i \Pi_{t-1}^i$$

então o VaR agregado da carteira  $p$  é dado por:

$$VaR_t^p = \sqrt{\mathbf{VaR}_t' \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{VaR}_t}$$

onde  $\mathbf{VaR}_t = (VaR_t^1 \quad VaR_t^2 \quad \dots \quad VaR_t^n)'$

isto é, a partir da matriz de correlação dos retornos, e do VaR individual (não diversificado) da posição de cada ativo da carteira, é possível obter-se o VaR agregado de todo o portfólio.

---

<sup>9</sup> Neste caso isso implica distribuição Normal Multivariada para  $\mathbf{R}$ :  $\mathbf{R} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$