Precificação de Opções

Luiz Alvares Rezende de Souza
lalvares@ibmec.br

A precificação de opções é importante para o cálculo de risco principalmente devido a:

- marcação da carteira a mercado (no caso de opções pouco líquidas)
- mapeamento da posição em fatores de risco
- cálculo de perdas em stress
- simulações de Monte-Carlo por *full valuation*.

Marcação a Mercado

No que diz respeito à marcação a mercado, existe uma questão quanto à liquidez da opção em questão. Um caso extremo, é uma opção exótica, de balcão. Nesse caso não existem cotações diárias para a opção, e a única alternativa é fazê-lo através de modelos. Uma boa referência para os modelos de precificação de opções disponíveis é o livro do Haug (Handbook of Options Pricing).

Outro caso extremo são as opções mais líquidas, com negócios diários. No caso das opções *at-the-money*, o uso de modelo, ou do preço de mercado é muito pouco significativo. No caso das opções menos líquidas, muito *in* ou *out-of-the-money*, mas com negócios praticamente diários, há problemas: a) o uso do preço de mercado está sujeito à baixa frequência dos negócios, e a possibilidade de se estar utilizando o preço de uma opção negociado no início do dia contra o preço do ativo no fechamento; b) o preço dado por modelo, como o de Black-Scholes, por exemplo, é impreciso, exigindo o uso de metodologias que levem em conta o *smile*, ou superfície de volatilidades.

Mapeamento

Para o mapeamento em fatores de risco, é necessário decompor-se o instrumento opção em seus fatores de risco correspondentes. O caso padrão consiste em fazer essa decomposição de maneira linear (ou em primeira ordem), utilizando-se o delta da opção. Uma maneira um pouco mais sofisticada consiste em se utilizar uma aproximação delta-gama, ou de segunda ordem. A opção por uma ou outra depende da flexibilidade do sistema de risco, e principalmente da importância que as opções tem na carteira. A aproximação torna-se tanto mais crítica quanto maior for a participação do book de opções no total da carteira.

De toda forma, o grande problema de mensuração de risco envolvido no caso das opções trata dos efeitos advindos de movimentos bruscos de preços no preço do *underlying*. Nesse caso, mesmo aproximações de 2ª ordem deixam a desejar, e a solução passa a ser a utilização de cenários de stress, e uma reavaliação completa do valor da carteira sob estes cenários.

O modelo mais utilizado no Brasil para precificação é o de Black-Scholes, e suas extensões: Garman-Kolhagen e Black, utilizados principalmente para opções cambiais. A seguir, suas fórmulas de precificação, e sensibilidades.

Modelo de Black-Scholes

O modelo utilizado para precificação de opções sobre ações é o modelo de Black-Scholes, que pode ser descrito por:

$$C_t = S_t N(d1) - Xe^{-r(T-t)} N(d2)$$

$$P_t = Xe^{-r(T-t)} N(-d2) - S_t N(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Onde:

C_t = preço de uma *call* no período t.
P_t = preço de uma *put* no período t.
S_t = preço da ação a que a opção se referere
X = preço de exercício da opção
r = taxa de juro sem risco
σ = volatilidade dos retornos do ativo
t = período a que se refere o preço da opção
T = vencimento da opção

$N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ = função densidade de probabilidade de uma normal padrão.

$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$ = função densidade de probabilidade acumulada de uma normal padrão.

As sensibilidades do preço das opções às variações nos fatores são dadas pelas “gregas”:

Delta: variação no preço do ativo-objeto, dado por $\Delta = N(d1)$

Gama: variação no delta, dado por $\Gamma = \frac{N'(d1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$

Vega: variação na volatilidade, dado por $\Lambda = S\sqrt{T-t}N'(d1)$

Modelo de Garman-Kolhagen

O modelo de *Garman-Kolhagen* permite a precificação de opções de câmbio com base no comportamente do preço do dólar à vista, e da taxa do cupom cambial (custo de oportunidade de retenção da moeda estrangeira).

$$C_t = S_t e^{-q(T-t)} N(d1) - Xe^{-r(T-t)} N(d2)$$

$$P_t = Xe^{-r(T-t)} N(-d2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - q + \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ e $$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Onde:

C_t = preço de uma *call* no período t.
P_t = preço de uma *put* no período t.
S_t = preço do ativo à vista, no caso a taxa de câmbio
X = preço de exercício da opção
r = taxa de juro sem risco
q = taxa do cupom cambial
σ = volatilidade dos retornos do ativo à vista
t = período a que se refere o preço da opção
T = vencimento da opção

$$N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$ = função densidade de probabilidade de uma normal padrão.

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$ = função densidade de probabilidade acumulada de uma normal padrão.

As sensibilidades do preço das opções às variações nos fatores são dadas pelas "gregas":

Delta: variação no preço do ativo-objeto, dado por:

$$\Delta_{CALL} = N(d1)e^{-q(T-t)}, \quad \Delta_{PUT} = [N(d1) - 1]e^{-q(T-t)}$$

Gama: variação no delta, dado por:

$$\Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT} = \frac{N'(d1)e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Vega: variação na volatilidade, dado por:

$$\Lambda_{CALL} = \Lambda_{PUT} = S\sqrt{T-t}\,N'(d1)e^{-q(T-t)}$$

Modelo de Black

Também utilizado pelo *mercado* para precificação de opções de câmbio. O modelo de *Black* tem a vantagem de modelar diretamente o processo do preço futuro do dólar.

$$C_t = [F_t N(d1) - XN(d2)]e^{-r(T-t)}$$

$$P_t = [XN(-d2) - F_t N(-d1)]e^{-r(T-t)}$$

$$d1 = \frac{\ln(F_t / X) + \sigma^2 (T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ e $$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Onde:

C_t = preço de uma *call* no período t.
P_t = preço de uma *put* no período t.
F_t = preço da ação a que a opção se refere
X = preço de exercício da opção
r = taxa de juro sem risco
σ = volatilidade dos retornos do ativo
t = período a que se refere o preço da opção
T = vencimento da opção

$$N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$ = função densidade de probabilidade de uma normal padrão.

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$ = função densidade de probabilidade acumulada de uma normal padrão.

As sensibilidades do preço das opções às variações nos fatores são dadas pelas “gregas”:

Delta: variação no preço do ativo-objeto, dado por:

$$\Delta_{CALL} = N(d1)e^{-r(T-t)}, \quad \Delta_{PUT} = [N(d1) - 1]e^{-r(T-t)}$$

Gama: variação no delta, dado por:

$$\Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT} = \frac{N'(d1)e^{-r(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Vega: variação na volatilidade, dado por:

$$\Lambda_{CALL} = \Lambda_{PUT} = S\sqrt{T-t}N'(d1)e^{-r(T-t)}$$