Estimação de Volatilidades

Pedro Luiz Valls Pereira
pvalls@ibmec.br

Apresentam-se quatro técnicas para estimação de volatilidade e matriz de covariâncias: o método amostral, o alisamento exponencial, o modelo GARCH e o modelo de volatilidade estocástica.

Em geral, os modelos estatísticos desenvolvidos para estimação de volatilidade tentam reproduzir um conjunto de fatos estilizados comuns às séries de retornos dos ativos financeiros, por exemplo, distribuições com caudas pesadas, agrupamento de valores extremos, etc. Estes fatos descritos em alguns trabalhos na área de estatística aplicada a finanças se baseiam no estudo sistematizado das características presentes em diversas séries históricas de ativos financeiros.

1. Desvio-Padrão Histórico e Janela de Dados

Inicialmente, considere o problema da estimação das volatilidades (desvios padrões) dos retornos dos ativos. Assumindo média zero, a volatilidade amostral dos retornos do ativo i utilizando uma amostra de T observações é definido como:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} r_{i,t}^2}{T}}$$

O cálculo do estimador utilizando toda amostra permite pouca adaptabilidade às informações mais recentes. Isto decorre do fato de que todas as observações da amostra recebem o mesmo peso.

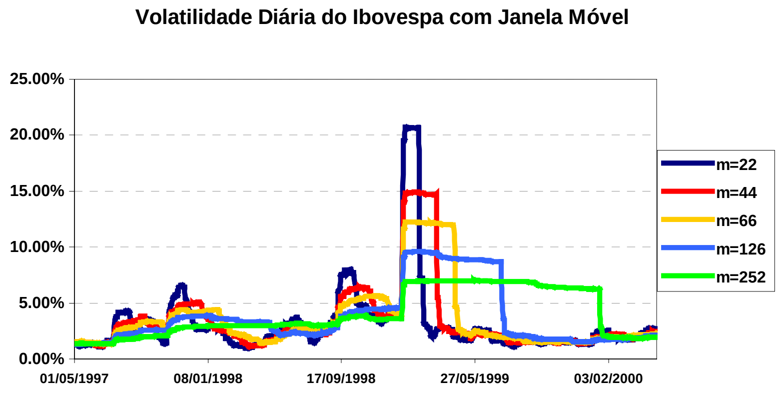
Para contornar este problema, utiliza-se, ao invés de toda amostra, uma janela móvel com um número fixo de observações. Apesar de ainda manter peso igual para todas observações utilizadas na janela, consegue-se alguma flexibilidade, pois pode-se controlar a importância da observações mais recentes através da escolha do tamanho da janela (figura 1).

No entanto, o uso deste estimador apresenta outro inconveniente. Em geral, a ocorrência de eventos extremos nas séries financeiras se dá com relativa freqüência. Como este estimador utiliza o mesmo peso para todas as observações da amostra, a volatilidade estimada dá um salto para cima após um retorno extremo permanecendo neste nível enquanto a observação permanecer na amostra. Quando a observação extrema sai da amostra a volatilidade salta para baixo novamente. Desta forma, em períodos subsequentes a grandes variações de preços dos ativos, a volatilidade e, por conseqüência, o risco tende a ser superestimado.

Figura 1

O gráfico ao lado apresenta a volatilidade para o Índice Bovespa usando janelas de 22, 44, 66, 126 e 252 dias úteis.

Observe que quanto menor o tamanho da janela maiores os picos de volatilidade. Por outro lado quanto menor o tamanho da janela mais rápido a volatilidade volta aos patamares anteriores.



2. A Solução do Alisamento Exponencial (EWMA)

A técnica de alisamento exponencial é uma tentativa de contornar a limitação do método amostral. Neste caso, o estimador da variância dos retornos é dado por:

$$\sigma_{i,t}^2 = \lambda\sigma_{i,t-1}^2 + (1-\lambda)r_{i,t-1}^2 \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

A variância do retorno num dado instante de tempo é composta por dois termos. O primeiro, um termo autorregressivo expressando a dependência temporal da variância dos retornos, fato estilizado presente na maioria das séries financeiras. O segundo, representando a contribuição da observação mais recente para a variância estimada. A expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_{i,T}^2 = \lambda^T\sigma_{i,0}^2 + (1-\lambda)\sum_{t=1}^{T-1}\lambda^t r_{i,T-t}^2$$

Na expressão acima a estimativa da variância dos retornos é igual a da variância inicial mais uma soma com pesos geometricamente declinantes dos quadrados dos retornos, que representa a variância instantânea. A influência da variância inicial sobre a variância presente tende a desaparecer e um candidato natural para estimador deste termo é o estimador da variância amostral. O segundo termo faz com que os efeitos dos choques nas séries de retornos sejam dissipados suavemente com o tempo. Note que o estimador amostral é um caso particular da expressão acima com $\lambda = \dfrac{T-1}{T}$.

O mesmo princípio pode ser estendido para estimação da covariância entre retornos de dois ativos. A covariância entre os retornos i e j é dada por:

$$\sigma_{ij,t}^2 = \lambda\sigma_{ij,t-1}^2 + (1-\lambda)r_{i,t-1}r_{j,t-1}$$

Da mesma forma que no cálculo das variâncias, a covariância inicial pode ser estimada pela covariância amostral.

3. O Parâmetro Ótimo de Decaimento

A escolha do parâmetro λ é *ad hoc* no sentido de que não envolve nenhum procedimento estatístico que gere uma estimativa a partir das observações passadas.

O banco JP Morgan na sua metodologia de análise de risco conhecida como *Riskmetrics* sugere um procedimento para a escolha de um λ ótimo baseado no erro de predição um passo a frente.
O previsor da variância do retorno um passo à frente é definido como $E(r_{t+1}^2) = \sigma_{t+1|t}^2$.
O erro de previsão um passo à frente é definido por $\varepsilon_{t+1|t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2$, que satisfaz $E(\varepsilon_{t+1|t}) = 0$.

Um critério para a escolha do λ ótimo de cada ativo seria obter o λ que minimize a variância dos erros de previsão um passo a frente:

$$RMSE_i = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2(\lambda))^2}$$

Para simplificar o cálculo diário das variâncias o *Riskmetrics* sugere o uso do mesmo λ para todas as séries calculadas da seguinte forma:

Seja Π a soma do RMSEs mínimos τ_i:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} \tau_i$$

Define-se a medida de erro relativo:

$$\theta_i = \frac{\tau_i}{\sum_{i=1}^{N} \tau_i}$$

Tome o conjunto de pesos dados por:

$$\phi_i = \frac{\theta_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{N} \theta_i^{-1}}$$

O $\bar{\lambda}$ ótimo é então definido como:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{\lambda}_i$$

onde, $\hat{\lambda}_i$ é o fator ótimo para o ativo i.

O mesmo procedimento poderia ser utilizado para o λ empregado no cálculo das covariâncias.

Por simplificação o *Riskmetrics* utiliza no cálculo das covariâncias o mesmo λ escolhido para o cálculos das variâncias. A propósito, na literatura de controle de risco o modelo que ficou conhecido como *Riskmetrics* é o modelo delta-normal com estimação por alisamento exponencial da matriz de covariâncias.
O modelo de alisamento exponencial tem maior capacidade de reproduzir os fatos estilizados do que o modelo amostral. A principal característica do modelo é que um valor de λ próximo de um reproduz o fato estilizado da volatilidade ser altamente persistente. Contudo, o fato da soma dos parâmetros do modelo (λ e $1-\lambda$) ser igual a um gera um inconveniente, a volatilidade não condicional dos retornos é igual a zero.

Como resultado, a distribuição não condicional dos retornos é degenerada, ou seja, sua média e variância são iguais a zero. Desta forma, toda massa da distribuição fica concentrada num único ponto, fato sem nenhum apoio empírico.

3. O modelo GARCH

Em séries de retornos de ativos financeiros é comum o fato de que grandes valores num determinado instante do tempo sejam seguidos por valores também elevados nos períodos subsequentes, não necessariamente na mesma direção.

Estatisticamente, esta característica pode ser descrita pela presença de elevada autocorrelação no quadrado dos retornos. A autocorrelação presente no quadrado dos retornos das séries financeiras faz com que a variância condicional dos retornos apresente uma dependência temporal dos choques passados.

O modelo de alisamento exponencial captura esta característica pois a estimativa da variância dos retornos é igual a da variância inicial mais uma soma com pesos geometricamente declinantes dos quadrados dos retornos. O problema com este modelo é que não existe um critério estatístico para estimação do parâmetro λ que leve em consideração as propriedades específicas de cada série de retorno. Desta forma, não é possível realizar inferência sobre as estimativas do modelo.
Um modelo mais genérico para a estimação da variância dos retornos é o ARCH proposto por Engle (1982). Este modelo expressa a variância condicional como uma defasagem distribuída do quadrado dos retornos passados. Seja

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim NI(0,1)$$
$$E_{t-1}(y_t^2) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 = \alpha(L) y_t^2$$

sendo $\alpha(L)$ um polinômio no operador defasagem do tipo $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + ... + \alpha_q L^q$ [i] e, para garantir a não negatividade da variância condicional devemos ter que ω, $\alpha_i > 0$ para i = 1,...,q.

O modelo acima possui algumas propriedades desejáveis. Em primeiro lugar, através da técnica de decomposição de erros de predição, é possível construir a função de verossimilhança tornando possível à estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança. Esta propriedade é importante porque estes estimadores possuem distribuições conhecidas que viabilizam a execução de testes de hipóteses diversos. Além disso, é possível provar que este modelo implica uma distribuição não condicional com caudas pesadas para os retornos.

Em geral, existe uma alta persistência na volatilidade das séries de retornos, o que faz com que o valor de q no modelo ARCH seja elevado implicando a necessidade de estimação de um grande número de parâmetros. O modelo GARCH proposto por Bollerslev (1986) constituísse numa tentativa de expressar de forma mais parcimoniosa a dependência temporal da variância condicional. Neste modelo a variância condicional além de depender do quadrado dos retornos passados como no modelo ARCH, depende também dos passados das próprias variâncias condicionais.

A variância condicional num modelo GARCH(p,q) é expressa por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha(L) y_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2$$

sendo $\alpha(L)$ e $\beta(L)$ são polinômios no operador defasagem L. A condição de não negatividade da variância condicional neste modelo é dada por: $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ para i = 1,…,q j = 1,…,p

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$y_t^2 = \omega + (\alpha(L) + \beta(L)) y_t^2 + (1 - \beta(L)) \eta_t$$

onde, $\eta_t = (y_t^2 - \sigma_t^2)$ é uma diferença martingal não Gaussiana.

Esta representação evidencia que um modelo GARCH(p,q) é um modelo ARMA(p,q) para os quadrados dos retornos. Esta característica permite a utilização de técnicas convencionais dos modelos da classe ARMA para a identificação de p e q.

Para garantir que este processo ARMA para o quadrado dos retornos seja covariância estacionária, as raízes de:

$$1 - \alpha(L) - \beta(L) = 0$$

têm que estar fora do círculo unitário. Com a condição de não negatividade satisfeita isto é garantido se $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$. Se esta condição valer a variância não condicional de y_t^2 é dada por:

$$E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \sigma = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i}$$

e a esperança condicional da variância n passos a frente é igual a:

$$E_t(\sigma_{t+n}^2) = (\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i)^n \left(\sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i} \right) + \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i}$$

o que significa que existe uma tendência para a variância condicional retornar ao valor da variância não condicional.

Se $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i = 1$ então o processo ARMA para y_t^2 possui uma raiz unitária. Engle e Bollerslev (1986) nomearam o modelo em que esta condição se verifica de GARCH integrado ou IGARCH.

Se y_t segue um IGARCH, então sua variância não condicional não é definida e os processos y_t e y_t^2 não satisfazem a definição de processos covariância estacionários. No entanto, ainda é possível que y_t atenda as condições de estacionaridade estrita no sentido de que sua densidade não condicional não varia no tempo. Esta propriedade é demonstrada em Nelson (1991).

O processo EWMA definido anteriormente é, portanto, um IGARCH com $\omega = 0$ com os parâmetros fixos arbitrariamente. Deste modo, os retornos teriam distribuição degenerada, isto é, sua distribuição não condicional teria média e variância iguais a zero. Desta forma, ao assumir que os retornos de determinado ativos têm variância condicional definida por um EWMA está-se, na verdade, fazendo uma restrição que pode não ser justificada pelos dados. Metodologicamente, o procedimento mais indicado seria estimar um GARCH e então testar a hipótese de que os parâmetros aceitam uma restrição do tipo $\omega = 0$, $\alpha + \beta = 1$. Isto garantia a estimação de um modelo coerente com a realização do processo estocástico dos retornos. Entretanto, testar estas duas restrições, conjuntamente, é complicado, pois, sob a nula, a distribuição seria degenerada.

O modelo GARCH é facilmente generalizado para o caso multivariado. Para tanto considere GARCH(p,q) para N ativos. Seja o vetor de retornos N x 1 y_t com matriz de covariâncias condicionais dadas por Σ_t tem-se que $vech(\Sigma_t)$ [ii] é relacionado com $vech(y_t y_t')$ e com $vech(\Sigma_{t-1})$ através de:

$$vech(\Sigma_t) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \Psi_i vech(\Sigma_{t-1}) + \sum_{j=1}^{q} \Lambda_j vech(y_{t-j} y_{t-j}')$$

onde ω é um vetor com N(N+1)/2 elementos e Ψ e Λ são matrizes N(N+1)/2 x N(N+1)/2. Portanto, o número total de parâmetros deste modelo é igual a (p+q)$N^2(N+1)^2/2$ + N(N+1)/2. Este é o maior inconveniente deste modelo, o número de parâmetros cresce rapidamente com N impossibilitando sua estimação. Por exemplo, um GARCH (1,1) com N=5 o número de parâmetros totais é igual a 465. Outra complicação destes modelos é garantir que Σ_t seja positiva definida.

A literatura de GARCH multivariados se concentra em achar restrições plausíveis sobre Σ_t que reduzam o número total de parâmetros a serem estimados e, ao mesmo tempo, façam que esta matriz de covariâncias seja positiva semi-definida.
Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) sugerem restringir as matrizes Ψ e Λ a matrizes diagonais o que implica que o elemento (i,j) de Σ_t no caso em que p = q = 1 seja representado por:

$$\sigma^2_{ij,t} = \omega_{ij} + \varphi_{ij}\sigma^2_{ij,t-1} + \alpha_{ij} y_{i,t-1} y_{j,t-1}$$

Neste modelo a condição para que a matriz Σ_t seja positiva semi-definida é que as matrizes de parâmetros $\lfloor\omega_{ij}\rfloor$, $\lfloor\varphi_{ij}\rfloor$ e $\lfloor\alpha_{ij}\rfloor$ sejam todas positivas semi-definidas.

Neste caso particular tem-se um total de 3N(N+1)/2 parâmetros a serem estimados. Portanto, para N = 5 o total de parâmetros reduz-se para 45.
Outra especificação simplificadora deste modelo é apresentada em Engle, Ng e Rothschild (1990). Neste artigo os autores sugerem a seguinte estrutura dinâmica para a matriz de covariâncias condicional:

$$\Sigma_t = \sum_{k-1}^{K} \beta_k \beta_k' \lambda_{kt} + \Omega$$

onde Ω é uma matriz N x N positiva semi-definida, β_k são vetores linearmente independentes não estocásticos e λ_{kt} são variáveis aleatórias positivas que representam os fatores que afetam os segundos momentos condicionais dos retornos. Neste modelo é garantido que Σ_t seja sempre positiva semi-definida.

Outra propriedade importante deste modelo é que sempre é possível construir portfólios cujas variâncias condicionais podem substituir os fatores λ_{kt}. Isto significa que Σ_t pode sempre ser reescrita na forma:

$$\Sigma_t = \sum_{k-1}^{K} \beta_k \beta_k' \theta_{kt} + \Omega^*$$

onde θ_{kt} são as variâncias condicionais de alguns portfólios apropriadamente construídos.

Para provar esta propriedade escolha α_k tal que α_k seja ortogonal a β_j para $j \neq k$ e $\alpha_k' \beta_j = 1$. A variância condicional dos retornos $p_{kt} = \alpha_k' y_t$, um portfólio construído com α_k como vetor de pesos, é igual a:

$$\theta_{kt} \equiv \alpha_k' \Sigma_t \alpha_k = \lambda_{kt} + s_k$$

onde

$$s_k \equiv \alpha_k' \Omega \alpha_k$$

o que implica:

$$\Sigma_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' \theta_{kt} + \Omega^*$$

com

$$\Omega^* = \left[\Omega - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' s_k \right]$$

Os portfólios construídos utilizando α_k como pesos são chamados de portfólios representativos dos fatores. A variância condicional destes portfólios é perfeitamente correlacionada com a variável latente λ_{kt}. Esta propriedade garante que a informação contida nos portfólios representantes dos fatores é suficiente para prever as variâncias e covariâncias dos ativos originais. Isto implica que existe causalidade na variância dos portfólios representantes de volatilidade para os ativos individuais.

Esta característica do modelo permite estudar a dinâmica de Σ_t através do comportamento dinâmico das variâncias condicionais dos portfólios construídos.
A maneira mais simples e, ao mesmo tempo, mais restritiva de construir o portfólio representativos dos fatores é assumir uma especificação univariada para este portfólio. Um conjunto de K porfólios representativos de fatores é dito ter uma representação de portfólios univariados se cada série de retornos (p_{kt}) dos portfólios representativos puder ser representada por um processo de série de tempo univarido condicional ao conjunto de informação multivariado completo. Um exemplo desta simplificação é impor que os retornos dos K portfólios representativos de fatores sigam um processo em que sua média condicional dependa da sua variância condicional e esta, por sua vez, evolua como uma GARCH(1,1), ou seja, supor uma estrutura ARCH-M para estes retornos como em Engle, Lilien & Robins (1987). Neste caso tem-se:

$$p_{kt} = c_k + \gamma_k \theta_{kt} + u_{kt} \qquad \mathrm{u}_{kt} \mid I_{t-i} \sim N(0, \theta_{kt})$$

$$\theta_{kt} = \omega_k + \phi_k u_{kt-1}^2 + \varphi_k \theta_{kt-1}$$

Desde que $u_{kt} = \alpha_k' \varepsilon_t$, tem-se $\theta_{kt} = \lambda_{kt} + s_k$. Esta especificação requer que a dinânica de λ_{kt} satisfaça:

$$\lambda_{kt} = [\omega_k + s_k(\varphi_k - 1)] + \phi_k (\alpha_k' \varepsilon_{t-1})^2 + \varphi_k \lambda_{kt-1}$$

Assim, a matriz de covariâncias dos retornos pode ser escrita como:

$$\Sigma_t = C^* + \sum_{k=1}^{K} \left\{ \phi_k \beta_k \beta_k' \left(\alpha_k' \varepsilon_{t-1} \right)^2 + \varphi_k \beta_k \beta_k' \left(\alpha_k' \Sigma_{t-1} \alpha_k \right) \right\}$$

onde,

$$C^* \equiv \left[\sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' \omega_k + \Omega^* \right]$$

Uma representação mais geral pode ser obtida assumindo o que os autores chamam de representação de portfólio recursiva. Um conjunto de K portfólios representativos de fatores é dito seguir uma representação de porfólios recursiva se eles podem ser rearranjados de tal forma que o k-ésimo portfólio dependa somente da informação relacionada ao seu próprio passado e do comportamento passado dos primeiros k-1 portfólios. Um exemplo deste tipo de representação é dado por:

$$p_{kt} = c_k + \gamma_k \theta_{kt} + u_{kt} \qquad \mathrm{u}_{\mathrm{kt}} \mid I_{t-i} \sim N(0, \theta_{kt})$$

$$\theta_{kt} = \omega_k + \phi_{kk} u_{kt-1}^2 + \varphi_{kk} \theta_{kt-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \phi_{kj} u_{jt-1}^2 + \varphi_{kj} \theta_{jt-1} \right\}$$

se $\phi_{ki} = \varphi_{ki} = 0$ para j≠k tem-se o caso anterior. Se não a variância em um portfólio é útil para prever a variância de outro, ou seja, existe uma causalidade na variância de um portfólio representativo de fatores para outro. Sob esta restrição, a matriz de variância condicional dos retornos é representada por:

$$\Sigma_t = C^* + \sum_{k=1}^{K} \left\{ A_k \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}' A_k' + G_k \Sigma_{t-1} G_k' \right\},$$

onde, $C^* \equiv \left[\sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' \omega_k + \Omega^* \right]$, $\quad A_k \equiv \sum_{j=1}^{k} \phi_{kj} \beta_k \beta_j'$, $\qquad G_k \equiv \sum_{j=1}^{k} \varphi_{kj} \beta_k \beta_j'$

Uma última e mais geral especificação proposta pelos autores é o que eles chamam de hipótese de representação genérica de portfólios. Um conjunto de K portfólios representativos de fatores é dito seguir uma representação genérica de portfólios se o retorno em um portfólio depende somente da informação relacionada ao comportamento passado de todos os K portfólios representativos de fatores.

Em Bollerslev (1990) é apresentado um modelo GARCH multivariado onde a redução no número de parâmetros a serem estimados é obtida através da imposição da hipótese de que as variâncias e covariâncias condicionais evoluem no tempo, mas as correlações condicionais são invariantes. O modelo é dado por:

$$y_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$$
$$\sigma_{ii,t} = \omega_i + \beta_{i1} \sigma_{ii,t-1}^2 + \alpha_{i1} \varepsilon_{it-1}^2$$
$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \left(\sigma_{ii} \sigma_{jj} \right)^{1/2}$$

onde ρ_{ij} é a correlação condicional entre os retornos dos ativos i e j, σ_{ii} a variância condicional do retorno do ativo i e σ_{ij} a covariância condicional entre os retornos dos ativos i e j.

4. O modelo de Volatilidade Estocástica

A idéia básica do modelo de volatilidade estocástica é tratar a volatilidade como um componente não observado com seu logaritmo sendo diretamente modelado como um processo autorregressivo. A estrutura desta classe de modelos é uma discretização dos processos estocásticos em tempo contínuo a partir dos quais são construídas generalizações do modelo de Black & Scholes (1973) como em Hull e White (1987) e Taylor (1994).

O modelo Volatilidade Estocástico (V.E.) univariado foi proposto por Taylor (1980) e tem a seguinte estrutura (na forma discreta):

$$r_t = \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \quad (19)$$

$$h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \eta_t \quad (20)$$

onde $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$ e $\eta_t \sim NID(0,\sigma_\eta^2)$ o que implica que a distribuição condicional dos retornos é normal, isto é, $r_t \mid h_t \sim N(0,\exp(h_t))$.

Assim h_t, o log-volatilidade , é um componente não observado. Se $|\gamma_1|<1$então h_t é estritamente estacionário com média $\gamma_0 / (1-\gamma_1)$ e variância $\sigma_\eta^2 / (1-\gamma_1^2)$. Como r_t é o produto de dois processos estritamente estacionários, segue-se que r_t também é estritamente estacionário. Além disto temos que r_t apresenta excesso de curtoses em relação à distribuição normal capturando o fato estilizado presente em séries financeiras mencionado anteriormente.

Este modelo também pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\log(r_t^2) = h_t + \log(\varepsilon_t^2) \quad (21)$$

$$h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \eta_t \quad (22)$$

esta versão nos logs é uma representação de espaço-estado linear para o modelo onde a primeira equação seria a equação de medida e a segunda a equação de transição.

A classe de modelos de volatilidade estocástica (VE) tem sua origem tanto em finanças matemática quanto em econometria de finanças. Por exemplo, Clark (1973) sugeriu modelar retornos de ativos como função de um processo aleatório da chegada de informação ao mercado. Esta abordagem chamada de deformação temporal implica num modelo para o retorno de ativos com volatilidade que varia ao longo do tempo. Tauchen e Pitts (1983) propõem uma mistura de distribuições com dependência temporal na chegada de informação. Hull e White (1987) propõem um modelo de precificação de opções Européias assumindo que o ativo subjacente segue um modelo de volatilidade estocástica a tempo contínuo. Uma outra abordagem surgiu do trabalho de Taylor (1986) que especifica um modelo de volatilidade estocástica a tempo discreto como uma alternativa ao modelo autorregressivo com heteroscedasticidade condicional (ARCH). Até pouco tempo a estimação do modelo de Taylor, ou de qualquer outro modelo da classe VE, era bastante difícil, mas técnica moderna de econometria permitiu que a estimação desta classe de modelos se tornasse factível. Deste modo esta classe se tornou uma alternativa aos modelos ARCH.

Os modelos VE são capazes de reproduzir alguns dos fatos estilizados presentes em séries financeiras. Considere o modelo VE dado por:

$$r_t = \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right)$$

$$h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \eta_t$$

onde r_t representa o retorno de um ativo e h_t o log da volatilidade que é um componente não observado relacionado a chegada de informação ao mercado.

Devido a estrutura do modelo pode-se mostrar que a distribuição de r_t gerada por este modelo tem caudas pesadas além disto devido a estrutura autorregressiva do logaritmo da volatilidade ela gera agrupamentos de volatilidade. Se os choques que influenciam os retornos e o logaritmo da volatilidade, isto é, ε_t e η_t respectivamente são negativamente correlacionados temos o efeito alavancagem. As evidências empíricas na estimação deste modelo são de que γ_1 é muito próximo de um implicando em alta persistência ou mesmo em memória longa.

Este modelo é facilmente generalizado para vários retornos. Num contexto multivariado podemos ter estruturas autorregressivas comuns entre os logaritmos das volatilidades que geram os co-movimentos em volatilidade.

A maior dificuldade com os modelo VE é que não se podem obter explicitamente expressões para as funções de verossimilhança como no caso de outros modelos de volatilidade condicional tais como os da família GARCH. Existem uma série de métodos de estimação para contornar este problema dentre eles temos: método generalizado de momentos(GMM), método de quase máxima verossimilhança (QMV) e Método das Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC).

A generalização para o caso multivariado é imediata. Seja r_t agora um vetor Nx1 cujos elementos são dados por:

$$r_{it} = \varepsilon_{it} \exp\left(\frac{h_{it}}{2}\right) \qquad i = 1,\dots,N \quad t = 1,\dots,T \qquad (23)$$

onde, r_{it} é a observação em t da série i e $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t},\dots,\varepsilon_{Nt})'$ é um vetor normal multivariado com média zero e matriz de covariância Σ_ε cujos termos da diagonal principal são iguais a um e os termos fora desta diagonal são denotados por ρ_{ij}.

Como em (22), as log-variâncias são geradas por:

$$h_{i,t+1} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} h_{i,t} + \eta_{i,t} \qquad i = 1,\dots,N \qquad (24)$$

onde, $\eta_{i,t} = (\eta_{1,t},\dots,\eta_{N,t})'$ é normal multivariado com média zero e matriz de covariâncias Σ_η.

Aplicando a mesma transformação que em (21) obtém-se a representação espaço-estado do modelo:

$$\omega_t = h_t + \xi_t \qquad (25)$$
$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \eta_t \qquad (26)$$

onde, ω_t e ξ_t são vetores Nx1 com elementos $\omega_{it} = \log(r_{i,t}^2)$ e $\xi_t = \log(\varepsilon_{i,t}^2)$, respectivamente. Tratando (25) e (26) como um modelo espaço-estado Gaussiano os estimadores de quasi-máxima verossimilhança podem ser obtidos através do uso do filtro de Kalman.

Como demonstrado em Harvey *et alli.* (1994), o elemento *ij* da matriz de covariâncias de ξ_t, denotada por Σ_ξ , é dado por $(\pi^2/2)\rho_{ij}^*$, onde $\rho_{ii}^* = 1$ e

$$\rho_{ij}^* = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(1/2)_n n} \rho_{ij}^{2n} \qquad i \neq j \quad i,j = 1,\dots,N \qquad (27)$$

onde, $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$.

Desta forma, os valores absolutos de ρ_{ij}, as correlações entre os diferentes $\varepsilon_{i,t}$´s, podem ser estimados, mas os seus sinais não podem porque a informação relevante foi perdida quando as observações foram elevadas ao quadrado. No entanto, o sinal pode ser estimado voltando para as observações não transformadas e lembrando que o sinal de cada par $\varepsilon_{i,t}\varepsilon_{ji,t}$ é igual ao sinal do respectivo par $y_i y_j$. Desta forma o sinal de ρ_{ij} pode ser estimado como positivo se mais da metade dos pares $y_i y_j$'s forem positivos e negativo caso contrário.

5. Bibliografia

(1) Black F. & Scholes, M. (1973) " The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, **81**, p. 637-59.

(2) Bollerslev, T. (1986) "Generalized autorregressive conditional heteroskedasticity" . *Journal of Econometrics*, **31**, p.303-327.

(3) Bollerslev, T.; Engle, R. F. & Wooldridge, J. M. (1988) " A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances". *Journal of Political Economy*, **96**, p.116-31

(4) Clark, P.K. (1973) "A subordinated Stochastic Process model with finite variance for speculative prices". *Econometrica*, **41**, p.135-155.

(5) Engle, R. F. (1982) "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation" . *Econometrica*, **50,** n 4, p. 987-1007.

(6) Engle, R. F. & Bollerslev, T. (1986) "Modeling the persistence of conditional variances". *Econometric Review*, **5**, n. 1, p1-50.

(7) Engle, R.F.; Lilien, D. & Robins, R. (1987) "Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M model". *Econometrica*, **55**, p.251-276.

(8) Engle, R. F.; Ng, V. & Rothschild, M. (1990) "Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills". *Journal of Econometrics*, **45**, p.213-238.

(9) Harvey, A.C.; Ruiz, E. & Shephard, N. (1994) "Modeling Stochastic variance models" *Review of Economic Studies*, **61**, 247-267.

(10) J & White, W. (1987) "The pricing of options on assets with stochastic volatility". *Journal of Finance*, **42**, p.281-300

(11) Nelson, D. (1991) "Conditional heteroskedasticity in assets returns: a new approach". *Econometrica*, **59**, n.2, p.347-370.

(12) Tauchen, G.E. & Pitts, M. (1983) "The price variability-volume relationship on speculative markets". *Econometrica*, **51**, p. 485-505.

(13) Taylor, S.J. (1980) "Conjectured models for trend in financial prices, tests and forecast". *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, **143**, p. 338-362.

(14) Taylor, S.J. (1986) *Modeling Financial Time Series*. New York: John Wiley.

(15) Taylor, S.J. (1994) "Modeling Stochastic Volatility". *Mathematical Finance*, **4**, p.183-204.

[i] L é tal que $Ly_t = y_{t-1}$.

[ii] O operador vech empilha a parte inferior de uma matriz N x N num vetor N(N+1)/2 x 1.